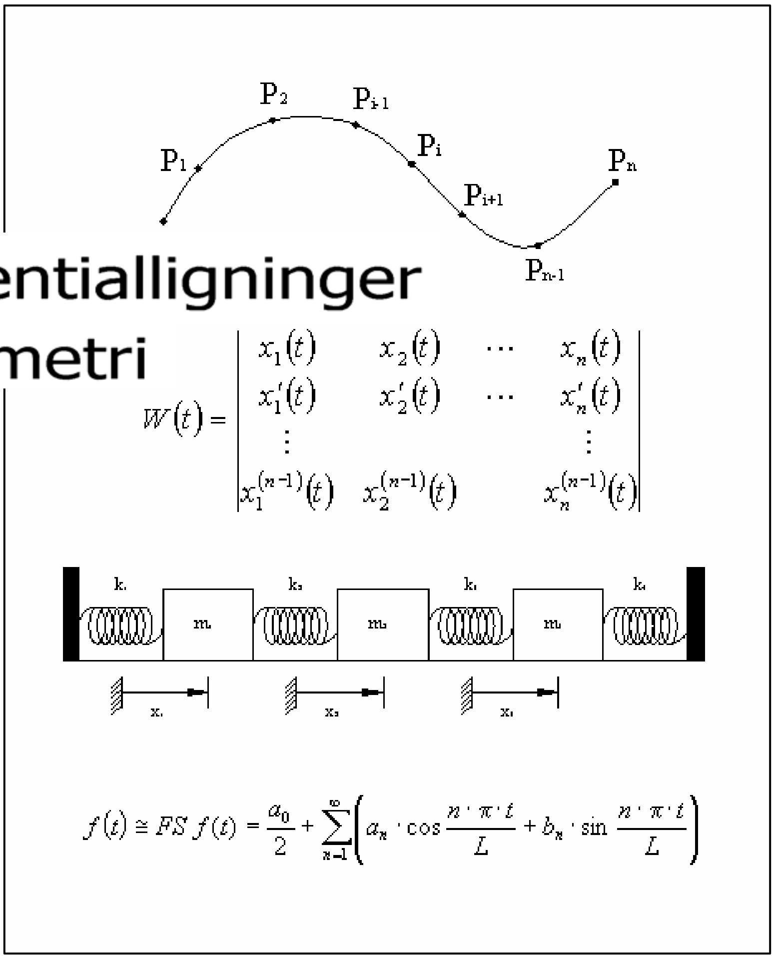
# Matematisk Formelsamling

► Differentialligninger

► Geometri




## for 3. og 4. semester

## Industri Civilingeniører

## Aalborg Universitet

# FORORD

Denne matematiske formelsamling er oprindeligt udarbejdet til 2. års ingeniørstuderende på industri-ingeniørlinien på Aalborg Universitet, og den dækker områderne:

- Geometri
- Differentialligninger

Formelsamlingen er udarbejdet i 1998-99 af studerende i frustration over, at der ikke fandtes nogen brugbar formelsamling til matematikundervisningen på industri-ingeniørlinien på Aalborg Universitet. Siden er formelsamlingen løbende med hjælp fra studerende og undervisere tilpasset og forbedret. Formelsamlingen indeholder på en overskuelig og letforståelig måde alt, hvad man behøver til opgaveregning og eksamen.

Jannick Schmidt
Institut for Samfundsudvikling og Planlægning
Aalborg Universitet
2002

# INDHOLD

# GEOMETRI

## PRODUKTER

### Prikprodukt

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = [a_1, a_2]\cdot[b_1, b_2] = a_1 b_1 + a_2 b_2 = |\vec{a}||\vec{b}|\cos v$$

Vigtige egenskaber:

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$$

$\cos v = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ , hvor $v$ er vinklen mellem de to vektorer

### Planprodukt

$[\vec{a},\vec{b}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = -\vec{a}\cdot\hat{\vec{b}} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin v =$ Areal af udspændt parallelogram

### Krydsprodukt eller vektorprodukt

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Vigtige egenskaber:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\perp\vec{a},\vec{b}$$

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ og $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left( \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$$

$$(k\vec{a})\times\vec{b} = k(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}\times(k\vec{b})$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin v$$

### Rumprodukt

$[\vec{c},\vec{a},\vec{b}] = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$ Volumen af udspændt epipedum

## PARAMETERFREMSTILLING

### Linie

Linie gennem $P_1$ og $P_2$:

$l:\ \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_1} + t\cdot\overrightarrow{P_1P_2}$ , hvor $Q\in l$

**Plan**

Plan $\alpha$ hvor $P \in \alpha$ og $\vec{b}, \vec{c}$ er to uafhængige vektorer i $\alpha$:

$\alpha: \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$, hvor $Q \in \alpha$

Plan $\alpha$ hvor $P_1 \neq P_2 \neq P_3 \in \alpha$:

$\alpha: \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_1} + r \cdot \overrightarrow{P_1P_2} + s \cdot \overrightarrow{P_1P_3}$, hvor $Q \in \alpha$

## LIGNINGER

**Linie i planen**

$\vec{n} = [a, b]$ normalvektor til linien *l*, og $P \in l$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{OP} \cdot \vec{n}$, hvor $Q = [x, y] \in l$ eller

$ax + by = d$

**Plan i rummet**

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$ eller $ax + by + cz = d$

hvor $Q = [x, y, z] \in \alpha$, $P = [x_0, y_0, z_0]$ som er et kendt punkt og $\vec{n} = [a, b, c]$ normalvektor til planen $\alpha$.

Hvis $\vec{a}, \vec{b} \in \alpha$ og $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er lineært uafhængige så er $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$

## SKÆRINGSPUNKTER OG LINIER

**Skæring mellem to linier i planen**

To linier i planen kan enten
- skære hinanden i et punkt
- være parallelle
- være sammenfaldende

*l*: $a_1 x + b_1 y = d_1$

*m*: $a_2 x + b_2 y = d_2$

Skæringen mellem *l* og *m* fås ved løsning af ligningssystemet:

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \end{array}\right]$$

Skæringen mellem to linier givet ved parameterfremstilling findes ved samme fremgangsmetode som ”Skæring mellem to linier i rummet” beskrevet nedenfor.

**Skæring mellem to linier i rummet**

To linier i planen kan enten
- skære hinanden i et punkt
- være parallelle
- være sammenfaldende
- være vindskæve

$l$: $[x, y, z] = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{a}$
$m$: $[x, y, z] = \overrightarrow{OQ} + s \cdot \vec{b}$

Skæringen mellem $l$ og $m$ fås ved løsning af ligningssystemet:
$\overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{a} = \overrightarrow{OQ} + s\vec{b}$ dvs.

$$\left[\begin{array}{cc|c} | & | & | \\ \vec{a} & -\vec{b} & \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ | & | & | \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & t \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Herved bestemmes $t$ og $s$. Skæringspunktet fås ved at indsætte $t$ i parameterfremstillingen for $l$ eller $s$ i parameterfremstillingen for $m$.

**Skæring mellem to planer i rummet**

To planer i rummet kan enten
- skære hinanden i en linie
- være parallelle
- være sammenfaldende

$\alpha : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$
$\beta : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

Der ønskes en parameterfremstilling $\vec{r}(t)$ for skæringslinien mellem $\alpha$ og $\beta$:

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

Skæringen mellem $\alpha$ og $\beta$ findes ved at reducere nedenstående matrix til reduceret række-form.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{array}\right]$$

Den kolonne hvori der ikke er pivot vælges til den frie parameter $t$, og de andre to koordinater findes som funktion af $t$ ved baglæns substitution.

Hvis en af koordinaterne bliver 0, vælges en af de andre til den frie parameter, og den tredige koordinat findes som funktion af $t$.

Eksempel:
Hvis resultatet bliver som:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & ? & ? \\ 0 & 1 & ? & ? \end{array}\right]$$

vælges $z$ til den frie variabel i skæringslinien $z = t$, og $x$ og $y$ som funktion af $t$, findes ved baglæns substitution i den reducerede matrix. Herved fås parameterfremstillingen for skæringslinien mellem de to planer.

$$\vec{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ t \end{bmatrix}$$

**Skæring mellem linie og plan i rummet**

En linie og en plan i rummet kan enten
- skære hinanden i et punkt
- være parallelle
- være sammenfaldende

$l$: $[x, y, z] = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{a}$

$\alpha : ax + by + cz = d$

Skæringen mellem $l$ og $\alpha$ findes ved at indsætte $x(t)$, $y(t)$ og $z(t)$ for linien $l$ i ligningen for planen $\alpha$, og derved finde værdien for den frie parameter $t$. Skæringspunktet fås ved indsættelse af den fundne værdi for $t$ i parameterfremstillingen for $l$.

## ORTOGONALPROJEKTION

**Projektion af en vektor på en anden**

Projektionen $\vec{p}$ af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er givet ved:

$$\vec{p} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}} \cdot \vec{b} = (\vec{a} \cdot \vec{e}) \cdot \vec{e} \text{ , hvor } \vec{e} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

$$|\vec{p}| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|} = |\vec{a}| \cos v$$ , hvor $v$ er vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$

**Projektion af et punkt på en linie**

Linie $l$: $[x, y, z] = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{a}$

Punkt $R = [x_1, y_1, z_1]$

Projektionen $R_l$ af et punkt $R$ på en linie $l$ fås ved:

$\overrightarrow{OR_l} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR_l}$ , hvor $P$ er et punkt på $l$ og $\overrightarrow{PR_l}$ er vektoren fra $P$ til projektionen af $R$ på $l$.

$$\overrightarrow{PR_l} = \frac{\overrightarrow{PR} \cdot \vec{a}}{|\vec{a} \cdot \vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

**Projektion af et punkt på en plan**

Plan $\alpha$ : $[\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}] = \overrightarrow{OP} + r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$

Punkt $R = [x_1, y_1, z_1]$

Projektionen $R_\alpha$ af et punkt $R$ på en plan $\alpha$ er givet ved:

$\overrightarrow{OR_\alpha} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{R_\alpha R}$ , hvor $\overrightarrow{R_\alpha R}$ er vektoren fra projektionen af $R$ på $\alpha$ til punktet $R$

$$\overrightarrow{R_\alpha R} = \frac{\overrightarrow{PR} \cdot \vec{n}}{|\vec{n} \cdot \vec{n}|} \cdot \vec{n}$$ , hvor $\vec{n}$ er normalvektoren til $\alpha$

**Projektion af en linie på en plan**

Plan $\alpha$ : $[\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}] = \overrightarrow{OQ} + r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$

Linie $l$: $[x, y, z] = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{a}$

Projektionen $l_\alpha$ af en linie *l* på en plan α er givet ved:
$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR_\alpha} + t \cdot [\vec{a} - \vec{p}]$ , hvor $\overrightarrow{OR_\alpha}$ er projektionen af et punkt $R \in l$ på α (udregnes som ovenfor "Projektion af et punkt på en plan"), og $\vec{p}$ er projektionen af retningsvektoren $\vec{a}$ for *l* på normalvektoren $\vec{n}$ for α

$$\vec{p} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\vec{n} \cdot \vec{n}|} \cdot \vec{n}$$

## AFSTANDE I RUMMET

**Afstanden mellem to punkter**

$P(x_1, y_1, z_1)$ og $Q(x_2, y_2, z_2)$ er to punkter i planen

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

**Afstanden mellem et punkt og en linie**

Linie *l*: $[x, y, z] = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{a}$
Punkt $R = [x_1, y_1, z_1]$

Afstanden mellem *R* og *l* er givet ved:

$$d(R,l) = \frac{\left|\overrightarrow{PR} \times \vec{a}\right|}{|\vec{a}|}$$

Vektoren $\overrightarrow{PR}$ er vektoren mellem et punkt *P* på *l* og punktet *R*

**Afstanden mellem et punkt og en plan**

Plan $\alpha$: $[\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}] = \overrightarrow{OQ} + r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$
Punkt $R = [x_1, y_1, z_1]$

Afstanden mellem *R* og α er givet ved:

$$d(R,\alpha) = \frac{\left|\overrightarrow{QR} \cdot \vec{n}\right|}{|\vec{n}|} = \frac{\left|\overrightarrow{QR} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right|}{\left|\vec{b} \times \vec{c}\right|}$$

Vektoren $\overrightarrow{QR}$ er vektoren mellem et punkt *Q* på α og punktet *R*

**Afstanden mellem to parallelle linier**

$l_1$ : $[x, y, z] = \overrightarrow{OQ_1} + t \cdot \vec{a}$
$l_2$ : $[x, y, z] = \overrightarrow{OQ_2} + s \cdot \vec{a}$

Hvis to linier $l_1$ og $l_2$ er parallelle er afstanden $d(l_1, l_2)$ mellem dem givet ved:

$$d(l_1, l_2) = \frac{\left|\overrightarrow{Q_1Q_2} \times \vec{a}\right|}{|\vec{a}|}$$

Vektoren $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ er vektoren mellem et punkt på $l_1$ og $l_2$

**Afstanden mellem to vindskæve linier**

$l_1: \ [x,y,z] = \overrightarrow{OQ_1} + t \cdot \vec{a}$

$l_2: \ [x,y,z] = \overrightarrow{OQ_2} + s \cdot \vec{b}$

Hvis to linier $l_1$ og $l_2$ skærer hinanden eller er vindskæve, er afstanden $d(l_1, l_2)$ mellem dem givet ved:

$$d(l_1, l_2) = \frac{\left|\overrightarrow{Q_1Q_2} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\right|}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|} = \frac{\left|\left[\overrightarrow{Q_1Q_2}, \vec{a}, \vec{b}\right]\right|}{\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|}$$

Vektoren $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ er vektoren mellem et punkt på $l_1$ og $l_2$

**Afstanden mellem to parallelle planer**

Plan $\alpha$: $[\mathrm{x,y,z}] = \overrightarrow{OQ} + r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$

Plan $\beta$: $[\mathrm{x,y,z}] = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{d} + u \cdot \vec{e}$

Afstanden mellem $\alpha$ og $\beta$ findes som afstanden mellem det ene plan og et punkt i det andet plan, som i ”Afstanden mellem et punkt og en plan”.

## VINKLER I RUMMET

**Vinklen mellem to linier**

$l_1: \ [x,y,z] = \overrightarrow{OQ_1} + t \cdot \vec{a}$

$l_2: \ [x,y,z] = \overrightarrow{OQ_2} + s \cdot \vec{b}$

Vinklen $\theta$ mellem linierne $l_1$ og $l_2$ findes ved

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

**Vinklen mellem en linie og en plan**

Linie *l*: $[x,y,z] = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{a}$

Plan $\alpha$: $[\mathrm{x,y,z}] = \overrightarrow{OQ} + r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$

Vinklen $\gamma$ mellem *l* og $\alpha$ findes ved

$\cos(90 - \gamma) = \dfrac{\vec{n} \cdot \vec{a}}{|\vec{n}||\vec{a}|}$ , hvor $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c}$ er normalvektoren til $\alpha$

**Vinklen mellem to planer**

Plan $\alpha$: $[\mathrm{x,y,z}] = \overrightarrow{OQ} + r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$

Plan $\beta$: $[\mathrm{x,y,z}] = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{d} + u \cdot \vec{e}$

Vinklen $\gamma$ mellem $\alpha$ og $\beta$ findes ved

$\cos\gamma = \dfrac{\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta}{|\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|}$ , hvor $\vec{n}_\alpha = \vec{b} \times \vec{c}$ og $\vec{n}_\beta = \vec{d} \times \vec{e}$ er henholdsvis $\alpha$’s og $\beta$’s normalvektor

$\left[\vec{i}\,', \vec{j}\,'\right]$ og $\left[x', y'\right]$ betegner henholdsvis de nye hovedenhedsvektorer og de nye koordinater, og $\left[\vec{i}, \vec{j}\right]$ og $\left[x, y\right]$ betegner de oprindelige hovedenhedsvektorer og koordinater.

**Koordinatskiftevektor *M***

$$M = \begin{bmatrix} \cos v & -\sin v \\ \sin v & \cos v \end{bmatrix} \text{ og } \quad M^{-1} = M^T = \begin{bmatrix} \cos v & \sin v \\ -\sin v & \cos v \end{bmatrix}$$

**Drejning af koordinatsystem, hovedenhedsvektorerne**

Nye hovedenhedsvektorer når koordinatsystemet drejes med vinklen *v*.

$$\vec{i}\,' = \cos v \cdot \vec{i} + \sin v \cdot \vec{j}$$

$$\vec{j}\,' = -\sin v \cdot \vec{i} + \cos v \cdot \vec{j}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{i}\,' \\ \vec{j}\,' \end{bmatrix} = M^T \cdot \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{bmatrix}$$

Oprindelige hovedenhedsvektorer:

$$\vec{i} = \cos v \cdot \vec{i}\,' - \sin v \cdot \vec{j}\,'$$

$$\vec{j} = \sin v \cdot \vec{i}\,' + \cos v \cdot \vec{j}\,'$$

$$\begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} \vec{i}\,' \\ \vec{j}\,' \end{bmatrix}$$

**Drejning af koordinatsystem, koordinater**

Nye koordinater når koordinatsystemet drejes med vinklen *v*.

$$x' = \cos v \cdot x + \sin v \cdot y$$

$$y' = -\sin v \cdot x + \cos v \cdot y$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = M^T \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Oprindelige koordinater:

$$x = \cos v \cdot x' - \sin v \cdot y'$$

$$y = \sin v \cdot x' + \cos v \cdot y'$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

**Drejning og flytning af koordinatsystem, koordinater**

Nye koordinater når koodinatsystemet drejes med vinklen *v* og flyttes $\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} + M^T \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ , hvor $\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix}$ er flytningen fra oprindelige origo til nye origo

Oprindelige koordinater:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + M \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$, hvor $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ er flytningen fra nye origo til oprindelige origo

Der gælder følgende sammenhæng mellem de to flytninger:

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = -M^T \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

## KURVER

### Beskrivelse

Kurver beskrives med parameterfremstilling, hvor parameteren er tid $t$

| | |
|---|---|
| $\vec{r}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ | Sted |
| $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = [x'(t), y'(t), z'(t)]$ | Hastighed |
| $\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \vec{r}\,''(t) = [x''(t), y''(t), z''(t)]$ | Acceleration |

Hvis en kurve er beskrevet som en funktion $f(x) = y$ fås parameterfremstilling ved:

$\vec{r}(t) = [t, f(t)]$

### Differentiation af kurver

| | |
|---|---|
| $(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)'(t) = \vec{r}_1\,'(t) + \vec{r}_2\,'(t)$ | Addition |
| $(f \cdot \vec{r})'(t) = f'(t) \cdot \vec{r}(t) + f(t) \cdot \vec{r}\,'(t)$ | Parameterfremstilling ganget med talfunktion |
| $(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)'(t) = \vec{r}_1\,'(t) \cdot \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2\,'(t)$ | Prikprodukt |
| $(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)'(t) = \vec{r}_1\,'(t) \times \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2\,'(t)$ | Krydsprodukt |

### Tangentvektor

Enhedstangentvektoren $\vec{t}$ til tiden $t_0$ er givet ved ($|\vec{t}| = 1$):

Hvis $\vec{r}\,'(t_0) \neq 0$ så er:

$$\vec{t}(t_0) = \frac{\vec{r}\,'(t_0)}{|\vec{r}\,'(t_0)|}$$

Hvis $\vec{r}\,'(t_0) = 0$ så er:

$$\vec{t}_+(t_0) = \lim_{t \to t_0+} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{|\vec{r}(t_0)|} \quad \text{og} \quad \vec{t}_-(t_0) = \lim_{t \to t_0-} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)}{|\vec{r}(t_0)|}$$

Når $\vec{r}\,'(t_0) = 0$ så er der spidstangent i $t_0$

### Binormalvektor

Enhedsbinormalvektoren $\vec{b}$ til tiden $t$ er givet ved ($|\vec{b}| = 1$):

$$\vec{b}(t) = \frac{\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)}{|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)|}$$

**Normalvektor**

Enhedsnormalvektoren $\vec{n}$ til tiden *t* er givet ved ($|\vec{n}| = 1$):

$$\vec{n}(t) = \vec{b}(t) \times \vec{t}(t)$$

hvor $\vec{t}$ er enhedstangentvektoren og $\vec{b}$ er enhedsbinormalvektoren

**Buelængde**

Buelængden *s* af en kurve fra $\vec{r}(t_0)$ til $\vec{r}(t_1)$ er

$$s = \int_{t_0}^{t_1} |\vec{r}\,'(t)|\,dt$$

hvor $|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$

**Buelængde som parameter**

Sammenhængen mellem almindelig parameterfremstilling $\vec{r}(t)$ og buelængdeparameterfremstilling $\vec{r}_{al}(s)$ er

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_{al} \cdot (s(t))$$

hvor $s(t)$ er buelængden fra $t = 0$ til *t*

**Krumning**

Krumning er defineret

$\kappa = \dfrac{1}{R}$, hvor *R* er radius for cirklen

**Krumning i planen**

Krumning i punktet *s* er (buelængde som parameter)

$$\vec{t}\,'(s) = \kappa(s) \cdot \vec{n}(s)$$

hvor $\vec{n}(s) = \hat{\vec{t}}(s)$ er hovednormalvektoren

Krumning i punktet *t* er (tid som parameter)

$$\kappa(t) = \frac{[\vec{r}\,'(t), \vec{r}\,''(t)]}{|\vec{r}\,'(t)|^3}$$

hvor $[\vec{r}\,'(t), \vec{r}\,''(t)]$ er planproduktet

**Krumning i rummet**

Krumning i punktet *s* er (buelængde som parameter)

$$\vec{t}\,'(s) = \kappa(s) \cdot \vec{n}(s)$$

hvor $\vec{n}(s) = \dfrac{\vec{t}\,'(s)}{|\vec{t}\,'(s)|}$ er hovednormalvektoren

Krumning i punktet *t* er (tid som parameter)

$$\kappa(t) = \frac{|\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)|}{|\vec{r}\,'(t)|^3}$$

**Oskulationscirkel**

En oskulationscirkel er den bedst approksimerende cirkel til et punkt $P_0$

- Går gennem punktet $P_0$
- Har samme tangentretning
- Har samme krumningsvektor $\kappa \cdot \vec{n}$

Cirklens radius = Krumningsradius = $\varphi = \dfrac{1}{\kappa}$

Cirklens centrum = $\overrightarrow{0P_0} + \varphi \cdot \vec{n}$

Cirklens parameterfremstilling $\vec{c}_{al}(s) = \left(\overrightarrow{0P_0} + \dfrac{1}{\kappa} \cdot \vec{n}\right) - \dfrac{1}{\kappa} \cdot \cos(\kappa \cdot s) \cdot \vec{n} + \dfrac{1}{\kappa} \cdot \sin(\kappa \cdot s) \cdot \vec{t}$

Cirklen ligger i et plan udspændt af $\vec{n}$ og $\vec{t}$

**Oskulationsplan**

En oskulationsplan $\omega_P$ er den bedst approksimerende plan til et punkt $P_0$

- Går gennem punktet $P_0$
- Indeholder tangentvektoren til $P_0$
- Indeholder $\vec{a}(t) = \vec{r}''(t) = v(t) \cdot \vec{t}(t) + v^2(t) \cdot \kappa(t) \cdot \vec{n}(t)$

$\omega_P$ er plan gennem $P_0$ udspændt af $\{\vec{r}'(t), r''(t)\}$ eller $\{\vec{t}(t), \vec{n}(t)\}$

Parameterfremstilling:

$\overrightarrow{0P_0} + u \cdot \vec{r}'(t) + v \cdot \vec{r}''(t)$ hvor $\{u, v\} \in R$

Ligning:

$\overrightarrow{OQ} \cdot (\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)) = \overrightarrow{OP_0} \cdot (\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t))$ hvor $Q = [x, y, z] \in \omega_P$

**Torsion $\tau$**

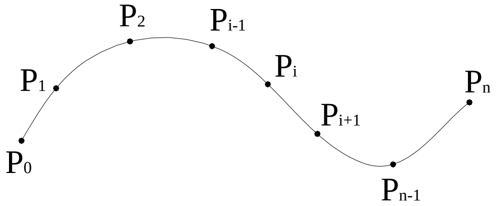
Torsion $\tau$ er et udtryk for hvor meget en kurve vrider sig, dvs. hvor hurtigt oskulationsplanen $\omega_P$ vipper.

$$\tau = \frac{\vec{r}'''(t) \cdot (\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t))}{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|^2}$$

## FERGUSSONKURVER ELLER KUBISKE SPLINES

**Definition**

Fergussonkurver er en kurve der gennemløber en række punkter $P_0$ til $P_n$ i en ”pæn” og ”glat” bane. Kurvestykkerne mellem punkterne $P_i$ og $P_{i+1}$ er givet ved et 3. gradspolynomium $\vec{p}_{i+1}(t)$ for $0 \le t \le 1$




Der gælder for punkterne at de sammenbinder kurvestykkerne:

$\vec{p}_i(1) = \vec{p}_{i+1}(0)$

Ligeledes gælder der for retningsvektorerne i enderne af kurvestykkerne at:
$\vec{p}_i'(1) = \vec{p}_{i+1} = \vec{v}_{i+1}$

Sluttelig gælder der for den anden afledede $\vec{p}''(t)$ af stedvektoren $\vec{p}(t)$ at:
$\vec{p}_i''(1) = \vec{p}_{i+1}''(0)$ og for kurvens endepunkter $\vec{p}_1''(0) = \vec{p}_n''(1) = 0$

**Retningsvektorerne**

Når punkterne $P_0$ til $P_n$ er kendt findes retningsvektorerne $\vec{v}_0$ til $\vec{v}_n$ ved løsning af ligningssystemet:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & . & & & & & & & \\ 1 & 4 & 1 & 0 & . & & & & & & \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & . & & & & & \\ & & & & & . & & & & & \\ & . & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & . & & & \\ & & . & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & . & & \\ & & & . & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & . & \\ & & & & & . & & & & & \\ & & & & & . & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ & & & & & & . & 0 & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & & & . & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{v}_0 \\ \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ . \\ \vec{v}_{i-1} \\ \vec{v}_i \\ \vec{v}_{i+1} \\ . \\ \vec{v}_{n-2} \\ \vec{v}_{n-1} \\ \vec{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3P_0 + 3P_1 \\ -3P_0 + 3P_2 \\ -3P_1 + 3P_3 \\ . \\ -3P_{i-2} + 3P_i \\ -3P_{i-1} + 3P_{i+1} \\ -3P_i + 3P_{i+2} \\ . \\ -3P_{n-3} + 3P_{n-1} \\ -3P_{n-2} + 3P_n \\ -3P_{n-1} + 3P_n \end{bmatrix}$$

(Læg mærke til at endepunkterne er forskellige fra de andre punkter)

Ovenstående svarer til at løse ligningssystemet:

$$A \begin{bmatrix} \vec{v}_0 \\ \vdots \\ \vec{v}_i \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} \overrightarrow{P_0P_1} \\ \vdots \\ \overrightarrow{P_{i-1}P_{i+1}} \\ \vdots \\ \overrightarrow{P_{n-1}P_n} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \vec{v}_0 \\ \vdots \\ \vec{v}_i \\ \vdots \\ \vec{v}_n \end{bmatrix} = 3 \cdot A^{-1} \begin{bmatrix} \overrightarrow{P_0P_1} \\ \vdots \\ \overrightarrow{P_{i-1}P_{i+1}} \\ \vdots \\ \overrightarrow{P_{n-1}P_n} \end{bmatrix}$$

Nedenfor er $A^{-1}$ angivet for $A$ som 3×3, 4×4, 5×5 og 6×6 matrix:

$$A^{-1}(3\times 3) = \begin{bmatrix} \frac{7}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{12} \end{bmatrix} \qquad A^{-1}(4\times 4) = \begin{bmatrix} \frac{26}{45} & -\frac{7}{45} & \frac{2}{45} & -\frac{1}{45} \\ -\frac{7}{45} & \frac{14}{45} & -\frac{4}{45} & \frac{2}{45} \\ \frac{2}{45} & -\frac{4}{45} & \frac{14}{45} & -\frac{7}{45} \\ -\frac{1}{45} & \frac{2}{45} & -\frac{7}{45} & \frac{26}{45} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}(5\times 5) = \begin{bmatrix} \frac{97}{168} & -\frac{13}{84} & \frac{1}{24} & -\frac{1}{84} & \frac{1}{168} \\ -\frac{13}{84} & \frac{13}{42} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{42} & -\frac{1}{84} \\ \frac{1}{24} & -\frac{1}{12} & \frac{7}{24} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{24} \\ -\frac{1}{84} & \frac{1}{42} & -\frac{1}{12} & \frac{13}{42} & -\frac{13}{84} \\ \frac{1}{168} & -\frac{1}{84} & \frac{1}{24} & -\frac{13}{84} & \frac{97}{168} \end{bmatrix} \quad A^{-1}(6\times 6) = \begin{bmatrix} \frac{362}{627} & -\frac{97}{627} & \frac{26}{627} & -\frac{7}{627} & \frac{2}{627} & -\frac{1}{627} \\ -\frac{97}{627} & \frac{194}{627} & -\frac{52}{627} & \frac{14}{627} & -\frac{4}{627} & \frac{2}{627} \\ \frac{26}{627} & -\frac{52}{627} & \frac{182}{627} & -\frac{49}{627} & \frac{14}{627} & -\frac{7}{627} \\ -\frac{7}{627} & \frac{14}{627} & -\frac{49}{627} & \frac{182}{627} & -\frac{52}{627} & \frac{26}{627} \\ \frac{2}{627} & -\frac{4}{627} & \frac{14}{627} & -\frac{52}{627} & \frac{194}{627} & -\frac{97}{627} \\ -\frac{1}{627} & \frac{2}{627} & -\frac{7}{627} & \frac{26}{627} & -\frac{97}{627} & \frac{362}{627} \end{bmatrix}$$

**Udregning af polynomier for kurvestykkerne**

Den kubiske spline mellem to punkter for *t* = [0;1] kan skrives på to måder:

1) $\vec{p}(t) = \vec{a}_0 + \vec{a}_1 \cdot t + \vec{a}_2 \cdot t^2 + \vec{a}_3 \cdot t^3$

Koefficienterne er:

$\vec{a}_0 = \vec{p}(0) = P_0$

$\vec{a}_1 = \vec{p}'(0) = \vec{v}_0$

$\vec{a}_2 = -3 \cdot \vec{p}(0) + 3 \cdot \vec{p}(1) - 2 \cdot \vec{p}'(0) - \vec{p}'(1)$

$\vec{a}_3 = 2 \cdot \vec{p}(0) - 2 \cdot \vec{p}(1) + \vec{p}'(0) + \vec{p}'(1)$

2) $\vec{p}(t) = F_1(t) \cdot \vec{p}(0) + F_2(t) \cdot \vec{p}(1) + F_3(t) \cdot \vec{p}'(0) + F_4(t) \cdot \vec{p}'(1)$

Fergussonpolynomierne er:

$F_1(t) = 2 \cdot t^3 - 3 \cdot t^2 + 1$

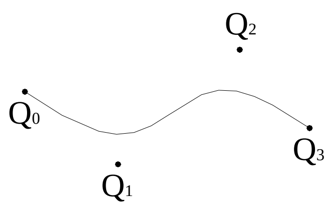
$F_2(t) = -2 \cdot t^3 + 3 \cdot t^2$

$F_3(t) = t^3 - 2 \cdot t^2 + t$

$F_4(t) = t^3 - t^2$

## BEZIÈRKURVER

Bezièrkurver er givet ved fire punkter $Q_0$, $Q_1$, $Q_2$ og $Q_3$, hvor $Q_0$ og $Q_1$ er endepunkterne og $Q_1$ og $Q_2$ er ”magneter”, der påvirker kurven mellem endepunkterne.




Kurven er givet ved parameterfremstillingen:

$\vec{q}(t) = B_{0,3}(t) \cdot Q_0 + B_{1,3}(t) \cdot Q_1 + B_{2,3}(t) \cdot Q_2 + B_{3,3}(t) \cdot Q_3$ , hvor

$B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} \cdot t^2 \cdot (1-t)^{n-1}$ og

$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!}$

3. grads-Bezièrpolynomierne er:

$B_{0,3}(t) = (1-t)^3 = 1 - 3 \cdot t + 3 \cdot t^2 - t^3$

$B_{1,3}(t) = 3 \cdot t \cdot (1-t)^2 = 3 \cdot t - 6 \cdot t^2 + 3 \cdot t^3$

$B_{2,3}(t) = 3 \cdot t^2 \cdot (1-t) = 3 \cdot t^2 - 3 \cdot t^3$

$B_{3,3}(t) = t^3$

**Sammenhæng mellem Fergusson- og Bezièrkurver**

$Q_0 = P_0$

$Q_3 = P_1$

$\vec{q}\,'(0) = -3 \cdot Q_0 + 3 \cdot Q_1 = 3 \cdot \overrightarrow{Q_0Q_1} = \vec{v}_0$

$\vec{q}\,'(1) = -3 \cdot Q_2 + 3 \cdot Q_3 = 3 \cdot \overrightarrow{Q_2Q_3} = \vec{v}_1$

## FLADER

**Beskrivelse af flader**

Flader kan være givet ved en parameterfremstilling med to frie variable:

$$\vec{r}(u,v) = \begin{bmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{bmatrix}$$

eller en ligning:

$F(x,y) = z$

Sammenhængen mellem parameterfremstilling og ligning er:

$$F(x,y) = z \to \vec{r}(u,v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ F(u,v) \end{bmatrix}$$

**Normalvektor**

Enhedsnormalvektoren i et punkt $P_0 = \vec{r}(u_0, v_0)$ er givet ved:

$$\vec{\nu}(u,v) = \frac{\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v)}{\left|\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v)\right|}$$

**Tangentplan**

Parameterfremstilling for tangentplan i $P_0 = \vec{r}(u_0, v_0)$:

$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_0} + s \cdot \vec{r}_u(u_0, v_0) + t \cdot \vec{r}_v(u_0, v_0)$ for $s, t \in R$

Ligning for tangentplan i $P_0 = \vec{r}(u_0, v_0)$:

$(\vec{x} - \vec{r}(u_0, v_0)) \cdot \vec{\nu} = 0$ hvor $\vec{x} = [x, y, z]$ er et vilkårligt punkt

**Fladens 1. fundamentalform**

$ds^2 = E \cdot du^2 + 2 \cdot F \cdot dudv + G \cdot dv^2$

hvor koefficienterne for fladens 1. fundamentalform er:

$E = \vec{r}_u(u,v) \cdot \vec{r}_u(u,v)$

$F = \vec{r}_u(u,v) \cdot \vec{r}_v(u,v)$

$G = \vec{r}_v(u,v) \cdot \vec{r}_v(u,v)$

Der gælder at $E \cdot G - F^2 = \left|\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v)\right|^2$

**Fladens 2. fundamentalform**

Koefficienterne for fladens 2. fundamentalform er givet ved:

$$e = \vec{r}_{uu}(u,v) \cdot \vec{v}(u,v)$$

$$f = \vec{r}_{uv}(u,v) \cdot \vec{v}(u,v)$$

$$g = \vec{r}_{vv}(u,v) \cdot \vec{v}(u,v)$$

hvor $\vec{v}(u,v)$ er enhedsnormalvektoren

**Længde af kurvestykke på fladen**

De to frie variabler skrives op som funktion af tiden, så der udtrykkes en kurve på fladen:

$$\vec{r}(u(t), v(t))$$

Længden af et kurvestykke $l$ fra tiden $t_0$ til $t_1$ er så givet ved:

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \left| \frac{d}{dt}(\vec{r}(u(t), v(t))) \right| dt$$

**Areal af fladestykke**

Arealet af et fladestykke i intervallet $v_0 \leq v \leq v_1$ og $u_0 \leq u \leq u_1$ er givet ved:

$$A = \int_{v_0}^{v_1} \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{(E \cdot G - F^2)(u,v)}\, du dv$$

**Hovedkrumning**

Hovedkrumningerne $\kappa_-$ og $\kappa_+$ er henholdsvis den minimale og den maksimale krumning. $\kappa_-$ og $\kappa_+$ står altid vinkelret på hinanden.

Hovedkrumningerne findes ved:

$$\kappa_\pm = H \pm \sqrt{H^2 - K}$$

**Middelkrumning**

Middelkrumningen $H$ er gennemsnittet af den maksimale og den minimale krumning $\kappa_-$ og $\kappa_+$:

$$H = \frac{E \cdot g - 2 \cdot F \cdot f + G \cdot g}{2 \cdot (E \cdot G - F^2)} = \frac{\kappa_- + \kappa_+}{2}$$

**Gausskrumning**

Gausskrumningen er produktet af den maksimale og den minimale krumning $\kappa_-$ og $\kappa_+$:

$$K = \frac{e \cdot g - f^2}{E \cdot G - F^2} = \kappa_- \cdot \kappa_+$$

**Punkter på fladen**

Punkterne på fladen kaldes:

| | |
|---|---|
| Elliptiske hvis $K > 0$ | Disse punkter optræder hvor fladen er dobbeltkrum, og begge krumninger peger væk fra normalvektoren, dvs. hele fladen ligger på den ene side af tangentplanen. $\kappa_-$ og $\kappa_+$ har samme fortegn. |

| | |
|---|---|
| Parabolske hvis $K = 0$ | Disse punkter optræder hvor fladen kun er krum i en retning, dvs. den er ikke dobbeltkrum. Et punkt er også parabolsk hvis fladen er en plan. |
| Hyperbolske hvis $K < 0$ | Disse punkter optræder hvor der er saddelpunkt på fladen, dvs. når den ene hovedkrumning er negativ og den anden er positiv. $\kappa_-$ og $\kappa_+$ har modsat fortegn. |

# DIFFERENTIALLIGNINGER

## TYPER AF DIFFERENTIALLIGNINGER

**Homogene differentialligninger**

Differentialligninger siges at være homogene, når funktionen af *x* og dens afledede $L(x)$er 0, dvs. $L(x) = 0$

**Inhomogene differentialligninger**

Differentialligninger siges at være inhomogene, når funktionen af *x* og dens afledede $L(x)$ er en funktion $f(t) \neq 0$, dvs.

$L(x) = f(t)$

**Lineære differentialligninger**

$L\colon V \to W$ betegner afbildningen $L(f) = \dfrac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\dfrac{dx}{dt} + a_0 x$

En afbildning siges så at være lineær hvis:

$L(c_1 x_1 + c_2 x_2) = c_1 L(x_1) + c_2 L(x_2)$

for alle $x_1 \in V$ , $x_2 \in V$ og alle konstanter

**Lineære differentialligninger af *n*'te orden med konstante koefficienter**

En differentiallignings orden *n* er afgjort af højest afledede af *x*. At koefficienterne er konstante betyder at $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$ er konstanter.

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

**Lineært uafhængige funktioner**

To funktioner $x_1$ og $x_2$ siges at være lineært uafhængige når Wronskiandeterminanten $W(x_1,x_2)$ er forskellig fra 0, dvs.:

$$W(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1' & x_2' \end{vmatrix} = x_1 x_2' - x_2 x_1' \neq 0$$

## LØSNINGER TIL DIFFERENTIALLIGNINGER GENERELT

**Eksistens og entydighed**

For ethvert talsæt $(t_0, x_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$ findes der netop een løsning $x = \varphi(t)$ til differentialligningen:

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

for hvilken:

$\varphi(t_0) = x_0$ og $\varphi^{(k)}(t_0) = v_k$ hvor $k = 1,2,\ldots,n-1$

**Fuldstændig løsning til en homogen differentialligning**

For enhver homogen lineær differentialligning $L(x)=0$ gælder, at hvis

$x_1, x_2, ..., x_n$ er løsninger til den homogene ligning, så er den komplementære løsning eller den fuldstændige løsning $x_c(t)$:

$x_c(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + ... + c_n x_n(t)$ også løsning til $L(x) = 0$

**Fuldstændig løsning til en inhomogen differentialligning**

Samtlige løsninger til den inhomogene ligning $L(x) = f(t)$ fås ved at addere samtlige løsninger til den homogene ligning $x_c(t)$ med en partikulær løsning $x_p(t)$ til den inhomogene ligning, dvs.

$x(t) = x_c(t) + x_p(t)$

**Superpositionsprincippet**

Hvis $x = x_i$ er løsninger til $L(x) = f_i(t)$ for $i = 1,...,n$, da er $x = r_1x_1 + r_2x_2 + ... + r_nx_n$ løsning til ligningen:

$L(x) = r_1 f_1(t) + r_2 f_2(t) + ... + r_n f_n(t)$

hvor $r_i$ er en konstant.

## LØSNINGER TIL 1. ORDENS DIFFERENTIALLIGNINGER

En 1. ordens differentialligning på formen:

$$\frac{dx}{dt} + P(t)\cdot x = Q(t)$$

løses ved:

1. Beregn integrationsfaktoren $\rho(t) = e^{\int P(t)dt}$
2. Multiplicer differentialligningen på hver side af lighedstegnet med $\rho(t)$:
   $$\rho(t)\cdot\frac{dx}{dt} + \rho(t)\cdot P(t)\cdot x = \rho(t)\cdot Q(t)$$
3. Venstre side af lighedstegnet er så den afledede af et produktet $\rho(t)\cdot x(t)$:
   $$D_t[\rho(t)\cdot x(t)] = \rho(t)\cdot Q(t)$$
4. Begge sider af ligningen integreres, og der løses mht. $x(t)$:
   $$\int D_t[\rho(t)\cdot x(t)]dt = \int \rho(t)\cdot Q(t)dt \Leftrightarrow$$
   $$x(t) = \frac{1}{\rho(t)}\cdot\left[\int \rho(t)\cdot Q(t)dt + C\right]$$

## HOMOGENE 2. ORDENS LIGNINGER MED KONSTANTE KOEFFICIENTER

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_0x = 0$$

Dette omfatter løsning af homogene 2. ordens differentialligninger med konstante koefficienter.

**Karakterligning**

Karakterligningen til differentialligningen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$$

er givet ved:

$$R^2 + a_1 R + a_0 = 0$$

**Løsning til ligning med 2 reelle rødder i karakterligningen**

$r_1$ og $r_2$ er de reelle rødder til karakterligningen. Den fuldstændige løsning er så:

$$x_c(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

**Løsning til ligning med 2 komplekse rødder i karakterligningen**

$a = \alpha \pm \beta i$ er de reelle rødder til karakterligningen. Den fuldstændige løsning er så:

$$x_c(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

**Løsning til ligning med reel dobbeltrod i karakterligningen**

$r$ er den reelle dobbeltrod til karakterligningen. Den fuldstændige løsning er så:

$$x_c(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}$$

## HOMOGENE *N*'TE ORDENS LIGNINGER MED KONSTANTE KOEFFICIENTER

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$$

Den fuldstændige løsning $x_c(t)$ til en homogen differentialligning af $n$'te orden består af $n$ funktioner, dvs.

$$x_c(t) = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n$$

**Karakterligning**

Karakterligningen til differentialligningen:

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$$

er givet ved:

$$R^n + a_{n-1}R^{n-1} + \ldots + a_1 R + a_0 = 0$$

**Løsning til ligning hvis $r_1, r_2, \ldots, r_n \in R$ er rødder i karakterligningen**

Der fås $n$ funktioner:

$$x_c(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \cdots + c_n e^{r_n t}$$

**Løsning til ligning hvis $r \in R$ er rod $n$ gange i karakterligningen**

Der fås $n$ funktioner:

$$x_c(t) = \left(c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \cdots + c_n t^{n-1}\right)\cdot e^{rt}$$

**Løsning til homogen ligning hvis $\alpha \pm \beta i \in C$ er rod $n$ gange i karakterligningen**

Der fås $2n$ funktioner:

$$\begin{aligned} x_c(t) = {} & c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t) + \\ & c_3 t e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_4 t e^{\alpha t}\cos(\beta t) + \cdots + \\ & c_{n-1} t^{n-1} e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_n t^{n-1} e^{\alpha t}\sin(\beta t) \end{aligned}$$

## INHOMOGENE LIGNINGER MED KONSTANTE KOEFFICIENTER

Retningslinier til gæt af en partikulær løsning $x_p(t)$ til differentialligninger på formen:

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t)$$

er angivet i tabellen nedenfor.

| $f(t)$ | $x_p(t)$ |
|---|---|
| $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n$ | $x^s\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n\right)$ |
| $a\cos kt + b\sin kt$ | $x^s\left(A\cos kt + B\sin kt\right)$ |
| $e^{rt}\left(a\cos kt + b\sin kt\right)$ | $x^s e^{rt}\left(A\cos kt + B\sin kt\right)$ |
| $\left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n\right)e^{rt}$ | $x^s e^{rt}\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n\right)$ |
| $\left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n\right)\cdot\left(a\cos kt + b\sin kt\right)$ | $x^s\left[\cos kt\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_n x^n\right) + \sin kt\left(B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots + B_n x^n\right)\right]$ |

Små bogstaver henviser til konstanter der optræder i funktionen $f(t)$, $s$ undtaget.

Store bogstaver henviser til ukendte konstanter som skal findes ved indsættelse af den gættede løsning $x_p(t)$ i differentialligningen.

$s$ vælges så stor, at ingen led i den partikulære løsning $x_p(t)$ bliver en konstant gange en komplementær løsning $x_c(t)$. Dvs. at den komplementære løsning skal findes før en partikulær løsning kan findes.

## INHOMOGENE LIGNINGER MED VARIABLE KOEFFICIENTER

Differentialligninger med variable koefficienter er på formen:

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_0(t)x = f(t)$$

hvor koefficienterne $a_i(t)$ er funktioner af $t$.

### Variation af parametre

Der haves en $n$'te grads inhomogen differentialligning, og der kendes $n$ uafhængige løsninger $x_c(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t)$ til den homogene ligning. Der ønskes nu at finde en partikulær løsning $x_p(t)$ til den inhomogene ligning.

Der gættes på en partikulær løsning på formen:

$$x_p(t) = u_1(t)x_1(t) + u_2(t)x_2(t) + \cdots + u_n(t)x_n(t)$$

hvor funktionerne $u_i(t)$ er ukendte og skal bestemmes.

$u_i'(t)$ findes ved løsning af ligningssystemet:

$$\begin{array}{ccccc}
u_1'(t)x_1(t) & +\cdots+ & u_n'(t)x_n(t) & = & 0 \\
u_1'(t)x_1'(t) & +\cdots+ & u_n'(t)x_n'(t) & = & 0 \\
u_1'(t)x_1^{(2)}(t) & +\cdots+ & u_n'(t)x_n^{(2)}(t) & = & 0 \\
\vdots & & & & \vdots \\
u_1'(t)x_1^{(n-2)}(t) & +\cdots+ & u_n'(t)x_n^{(n-2)}(t) & = & 0 \\
u_1'(t)x_1^{(n-1)}(t) & +\cdots+ & u_n'(t)x_n^{(n-1)}(t) & = & f(t)
\end{array}$$

Ved Cramers regel fås:

$$u_i'(t) = \frac{W_i(t)f(t)}{W(t)} \Rightarrow$$

$$u_i(t) = \int \frac{W_i(t)f(t)}{W(t)}\,dt$$

hvor $W(t)$ er Wronskiandeterminanten $W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_n'(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & x_2^{(n-1)}(t) & & x_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$

og $W_i(t)$ er Wronskiandeterminanten $W(t)$ hvor den $i$'te kolonne $\begin{bmatrix} x_i(t) \\ x_i'(t) \\ \vdots \\ x_i^{(n-1)} \end{bmatrix}$ er udskiftet med $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$

## ORDENSREDUKTION AF HOMOGENE LIGNINGER

**Løsning $x_2$ til 2. ordens ligning når en løsning $x_1$ er kendt**

Kendes en løsning $x_1(t)$ til den homogene 2. ordens ligning:

$$x''(t) + a_1 p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0$$

findes den anden løsning $x_2(t)$ ved:

$$x_2(t) = x_1(t) \cdot \int \frac{e^{-\int p(t)dt}}{[x_1(t)]^2}\,dt$$

## EULER-CAUCHY LIGNINGER

**2. ordens Euler-Cauchy ligning**

En 2. ordens Euler-Cauchy ligning skrives på formen:

$$t^2 x'' + p_0 t x' + q_0 x = 0$$

Substitueres $x(t) = t^r$, $x'(t) = rt^{r-1}$ og $x''(t) = r(r-1)t^{r-2}$ fås:

$$t^2 r(r-1)t^{r-2} + p_0 t r t^{r-1} + q_0 t^r = 0 \Leftrightarrow$$

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$$

Når der er 2 reelle rødder $r_1 \neq r_2$ i ligningen er den generelle løsning:

$$x(t) = c_1 t^{r_1} + c_2 t^{r_2}$$

Når der er reel dobbeltrod $r$ i ligningen er den generelle løsning:

$$x(t) = c_1 t^r + c_2 t^r \ln t$$

Når der kompleks konjugeret rod $a \pm bi$ er den generelle løsning:

$$x(t) = c_1 t^a \cos(b \ln t) + c_2 t^a \sin(b \ln t)$$

***n*'te ordens Euler-Cauchy ligning**

En 2. ordens Euler-Cauchy ligning skrives på formen:

$$a_n t^n x^{(n)} + a_{n-1} t^{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_2 t^2 x'' + a_1 t x' + a_0 x = 0$$

Substitueres $x(t) = t^r$ fås:

$$a_n r(r-1)\cdots(r-n+1) + \cdots + a_2 r(r-1) + a_1 r + a_0 = 0$$

Hvis der er $n$ forskellige rødder i ligningen er den komplementære løsning:

$$x(t) = c_1 |t|^{r_1} + c_2 |t|^{r_2} + \cdots + c_n |t|^{r_n}$$

## LAPLACETRANSFORMATIONER

**Definition**

Lad $f(t)$ være defineret for $t > 0$, så er Laplacetransformationen af $f(t)$:

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t)dt = F(s)$$

$L\{f(t)\} = F(s)$
$L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$

**Linearitet**

Laplacetransformationer er lineære, dvs.

$$L\{a \cdot f(t) + b \cdot g(t)\} = a \cdot L\{f(t)\} + b \cdot L\{g(t)\}$$

**Laplacetransformationer af afledede funktioner**

Hvis $f(t)$ er kontinuert og stykvis differentiabel så:

$$L\{f'(t)\} = s \cdot L\{f(t)\} - f(0) = s \cdot F(s) - f(0)$$

$$L\{f''(t)\} = s \cdot L\{f'(t)\} - f'(0) = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)$$

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n \cdot L\{f(t)\} - s^{n-1} \cdot f(0) - s^{n-2} \cdot f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

**Laplacetransformationer af integraler**

Hvis $f$ er stykvis kontinuert for $t \geq 0$ samt af eksponentiel orden så er:

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s} \cdot L\{f(t)\} = \frac{F(s)}{s}$$

Hvis den afledte af $\int_0^t f(\tau)d\tau$ er "let" så benyttes denne sætning på $L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}$.

Tilsvarende gælder:

$$L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\}=\int_0^t f(\tau)d\tau$$

Hvis $s\cdot F(s)$ er "let" så benyttes denne sætning på $L^{-1}\{F(s)\}$

**Translation på *s*-aksen**

$$L\{e^{at}\cdot f(t)\}=F(s-a)$$

dvs. at den Laplacetransformerede til $e^{at}\cdot f(t)$ findes som den Laplacetransformerede til *f*(*t*), hvorefter *s* udbyttes med *s* – *a*.

$$L^{-1}\{F(s-a)\}=e^{at}\cdot f(t)$$

dvs. den invers Laplacetransformerede af *F*(*s* - *a*) findes som den inverse Laplacetransformerede af *F*(*s*), hvorefter der ganges med $e^{at}$.

**Translation på *t*-aksen**

$$L\{u(t-a)\cdot f(t-a)\}=e^{-as}\cdot F(s)$$

Tilsvarende er:

$$L^{-1}\{e^{-as}\cdot F(s)\}=u(t-a)\cdot f(t-a)$$

**Foldning**

Foldningen *f* * *g* af de stykvis kontinuerte funktioner *f* og *g* er defineret for $t\geq 0$ som:

$$(f*g)(t)=\int_0^t f(\tau)\cdot g(t-\tau)d\tau$$

Laplacetransformerede af foldede funktioner er givet ved:

$$L\{f(t)*g(t)\}=L\{f(t)\}\cdot L\{g(t)\}$$

og

$$L^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\}=f(t)*g(t)$$

dvs. den inverse Laplacetransformerede af $F(s)\cdot G(s)$ findes som foldningen $f(t)*g(t)$.

NB. $f*g\neq f\cdot g$

**Differentiation af transformerede**

Hvis *f* er stykvis kontinuert for $t\geq 0$ samt af eksponentiel orden så er:

$$L\{-t\cdot f(t)\}=F'(s)$$

Tilsvarende gælder:

$$f(t)=L^{-1}\{F(s)\}=-\frac{1}{t}\cdot L^{-1}\{F'(s)\}$$

**Integration af transformerede**

Hvis *f* er stykvis kontinuert for $t\geq 0$ samt af eksponentiel orden så er:

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^\infty F(\sigma)d\sigma$$

Tilsvarende gælder:

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = t \cdot L^{-1}\left\{\int_s^\infty F(\sigma)d\sigma\right\}$$

**Transformation af periodiske funktioner**

Hvis $f(t)$ er periodisk med perioden $p$ og stykvis kontinuert for $t \geq 0$ så er:

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{1-e^{-ps}} \cdot \int_0^p e^{-st} \cdot f(t)dt$$

**Duhamels princip**

Mange fysiske systemer kan beskrives med differentialligningen:

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = f(t)$$

Hvis $x'(0) = x(0) = 0$ Laplacetransformeres og $X(s)$ isoleres:

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_2} \cdot F(s)$$

$W(s) = \dfrac{1}{s^2 + a_1 s + a_2}$ kaldes for stivhedskoefficienten.

Løsningen $x(t)$ fås ved Duhamels princip:

$$x(t) = \int_0^t w(\tau) f(t-\tau)d\tau$$

**Laplacetransformerede funktioner**

| $f(t)$ | $F(s)$ |
|---|---|
| $1$ | $\frac{1}{s} \quad (s > 0)$ |
| $t$ | $\frac{1}{s^2} \quad (s > 0)$ |
| $t^n \; (n \geq 0)$ | $\frac{n!}{s^{n+1}} \quad (s > 0)$ |
| $t^a \; (a > -1)$ | $\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}} \quad (s > 0)$ |
| $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ | $\frac{1}{\sqrt{s}}$ |
| $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a} \quad (s > a)$ |
| $t^n \cdot e^{at}$ | $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad (s > 0)$ |
| $(-1)^{[[at]]}$ | $\frac{1}{s} \cdot \tanh\frac{as}{2} \quad (s > 0)$ |

| $f(t)$ | $F(s)$ |
|---|---|
| $\cos kt$ | $\frac{s}{s^2+k^2} \quad (s > 0)$ |
| $\sin kt$ | $\frac{k}{s^2+k^2} \quad (s > 0)$ |
| $\cosh kt$ | $\frac{s}{s^2-k^2} \quad (s > \lvert k \rvert)$ |
| $\sinh kt$ | $\frac{k}{s^2-k^2} \quad (s > \lvert k \rvert)$ |
| $e^{at} \cdot \cos kt$ | $\frac{s-a}{(s-a)^2+k^2} \quad (s > a)$ |
| $e^{at} \cdot \sin kt$ | $\frac{k}{(s-a)^2+k^2} \quad (s > a)$ |
| $u(t-a)$ | $\frac{e^{-as}}{s} \quad (s > 0)$ |
| $\delta(t-a)$ | $e^{-as} \quad (s > 0)$ |

I ovenstående tabel er betegnelserne:

$k$ konstant $\in$ R

$a$ konstant $\in$ R

$n$ er mængden af hele tal

- Enhedsstepfunktionen *u* er $u(t-a)=\begin{cases}0 & \text{for } t<a\\ 1 & \text{for } t\geq a\end{cases}$

- Funktionen $[\![x]\!]$ er defineret ved at $[\![x]\!]=$det største heltal der ikke er lig eller overstiger *x*.

- Funktionen Γ er defineret ved:

  $$\Gamma(x)=\int_0^{\infty} e^{-t}\cdot t^{x-t}dt$$

  Funktionsværdier udregnes generelt ikke efter ovenstående udtryk, men slås op eller udregnes efter nedenstående:

  $\Gamma(n+1)=n!$ hvor *n* tilhører mængden af hele tal

  $\Gamma(x+1)=x\cdot\Gamma(x)$

  $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

## EGENVÆRDIMETODEN FOR HOMOGENE SYSTEMER

**1. ordenssystemer**

Der ønskes en komplementær løsning $\vec{x}_c(t)$ til det homogene ligningssystem:

$$\begin{array}{ccccc} x_1' & = & a_{11}x_1 & +\cdots+ & a_{1n}x_n \\ x_1' & = & a_{21}x_1 & +\cdots+ & a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_n' & = & a_{n1}x_1 & +\cdots+ & a_{nn}x_n \end{array}$$

Fremgangsmetoden er følgende:

1. Først bestemmes egenværdierne $\lambda_1, \lambda_2,..., \lambda_n$ tilhørende $A=\lfloor a_{ij}\rfloor$ ved ligningen:

   $$|A-\lambda I|=\det\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}=0$$

2. For hver egenværdi $\lambda_1$ til $\lambda_n$ findes en tilhørende egenvektor $\vec{v}$ ved løsning af ligningssystemet:

   $(A-\lambda I)\vec{v}=\vec{0}$

   Da der er uendelig mange lineært afhængige løsninger vælges en komponent i $\vec{v}$, hvoraf de andre findes. Fx vælges $v_1$ frit i $\vec{v}=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ og $v_2$ og $v_3$ bestemmes.

3. Det er ikke altid muligt at finde $n$ lineært uafhængige løsninger til ligningen i 2. men når de findes, fås $n$ lineært uafhængige løsninger til systemet af differentialligninger:

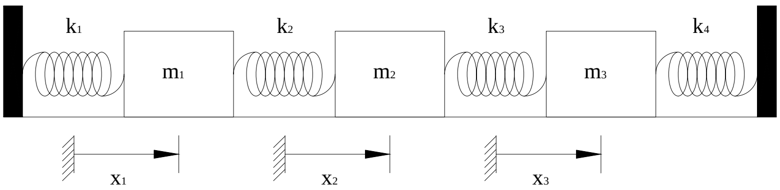
   - Hvis der findes $n$ reelle ikke multiplicible egenværdier fås $n$ lineært uafhængige løsninger til systemet af differentialligninger:
     $\vec{x}_1(t) = \vec{v}_1 e^{\lambda_1 t}\ , \vec{x}_2(t) = \vec{v}_2 e^{\lambda_2 t}\ , \cdots, \vec{x}_n(t) = \vec{v}_n e^{\lambda_n t}$

   - Hvis der findes komplekse konjugerede egenværdier $\lambda = p \pm iq$ med tilhørende egenvektorer $\vec{v} = a \pm ib$ bliver løsningen:
     $\vec{x}(t) = e^{pt}\left(\vec{a}\cos qt - \vec{b}\sin qt\right) + i \cdot e^{pt}\left(\vec{b}\cos qt - \vec{a}\sin qt\right)$
     Heraf fås de to løsninger:
     $\vec{x}_1(t) = \mathrm{Re}(x(t)) = e^{pt}\left(\vec{a}\cos qt - \vec{b}\sin qt\right)$
     $\vec{x}_2(t) = \mathrm{Im}(x(t)) = e^{pt}\left(\vec{b}\cos qt + \vec{a}\sin qt\right)$

   Den komplementære løsning til systemet af differentialligninger bliver så:
   $\vec{x}_c(t) = c_1\vec{x}_1(t) + c_2\vec{x}_2(t) + \cdots + c_n\ \vec{x}_n(t)$

**2. ordenssystemer (masse-fjedersystemer)**

Masse-fjedersystemet nedenfor er et 2. ordenssystem bestående af tre masser $m$ og fire fjedre $k$.




Betragtes systemet med $n$ masser $m_i$ defineres:

$$\text{Masse matrix } M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & m_n \end{bmatrix}$$

$$\text{Stivhedsmatrix } K = \begin{bmatrix} -(k_1+k_2) & k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ k_2 & -(k_2+k_3) & k_3 & \cdots & 0 \\ 0 & k_3 & -(k_3+k_4) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & k_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -(k_{n-1}+k_n) & k_n \\ 0 & 0 & \cdots & k_n & -(k_n+k_{n+1}) \end{bmatrix}$$

Systemet af 2. ordens differentialligninger fås ved:

$M\vec{x}'' = K\vec{x} \Rightarrow \vec{x}'' = M^{-1}K\vec{x} \Rightarrow \vec{x}'' = A\vec{x}$

Hvis matricen $A$ har reelle negative egenværdier $\lambda_1 = -\omega_1^2, \lambda_2 = -\omega_2^2, ..., \lambda_n = -\omega_n^2$ med tilhørende egenvektorer $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$, så fås en generel løsning til ligningssystemet ved:

$$\vec{x}(t) = \sum_{i}^{n} \left(a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t\right)\vec{v}_i$$

hvor $a_i$ og $b_i$ er konstanter.

I det specielle tilfælde hvor en ikke multiplicibel egenværdi antager værdien $\lambda_0 = 0$ med tilhørende egenvektor $\vec{v}_0$, bliver løsningen:

$$\vec{x}_0(t) = \left(a_0 + b_0 t\right)\vec{v}_0$$

## FOURIERRÆKKER

**Periodiske funktioner**

En funktion $f(t)$ er periodisk med perioden $p$ hvis:

$f(t + p) = f(t)$ hvor $p > 0$

$p$ angiver den mindste periode.

**Definition**

Lad $f(t)$ være en stykvis kontinuert funktion med perioden $2L$, så er Fourierrækken $FS\ f(t)$ af $f(t)$ givet ved:

$$f(t) \cong FS\ f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cdot \cos\frac{n \cdot \pi \cdot t}{L} + b_n \cdot \sin\frac{n \cdot \pi \cdot t}{L}\right)$$

hvor Fourierkoefficienterne $a_n$ og $b_n$ er givet ved:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos\frac{\pi n t}{L}\, dt \quad \text{for } n = 0,1,2,3,\cdots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin\frac{\pi n t}{L}\, dt \quad \text{for } n = 1,2,3,\cdots$$

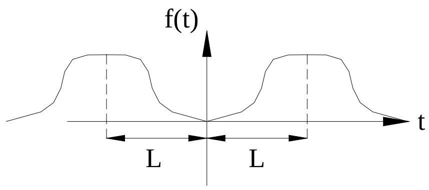
$a_0$ fremkommer ved at sætte $n = 0$ i $a_n$.

**Lige og ulige funktioner**

Lige funktioner har egenskaben:

$f(-t) = f(t)$ for $-L < t < L$

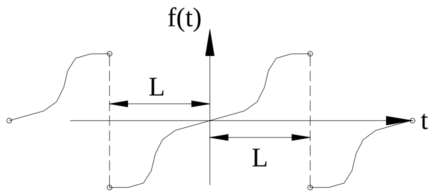
dvs. de er symmetriske om $y$-aksen i intervallet $t \in [-L;L]$.




Ulige funktioner har egenskaben:

$f(-t) = -f(t)$ for $-L < t < L$

dvs. de er symmetriske om origo i intervallet $t \in [-L;L]$.




**Fourierrækker af lige og ulige funktioner**

Lad $f(t)$ være defineret på intervallet 0 <

Lige udvidelse: $f(t) = \begin{cases} f(t) & , \quad 0 < t < L \\ f(-t) & , -L < t < 0 \end{cases}$

Ulige udvidelse: $f(t) = \begin{cases} f(t) & , \quad 0 < t < L \\ -f(-t) & , -L < t < 0 \end{cases}$

Fourierrækken *FS* $f(t)$ af en lige funktion $f(t)$ er:

$$FS\ f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} \qquad \text{Cosinusfourierrække af } f(t)$$

Fourierrækken *FS* $f(t)$ af en ulige funktion $f(t)$ er:

$$FS\ f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi t}{L} \qquad \text{Sinusfourierrække af } f(t)$$

**Løsning af differentialligninger vha. Fourierrækker**

Der er givet differentialligningen med endebetingelserne:

$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f(t)$ for $0 < t < L$

med randbetingelserne $x(0) = x(L) = 0$

1. Udvid først $f(t)$ til intervallet $-L < t < 0$
   Udvidelsen er enten lige eller ulige.

   Forudsat, at $f(t)$ er stykvis glat, har denne Fourierrækken:
   $$f(t) \cong FS\ f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cdot \cos\frac{n\cdot\pi\cdot t}{L} + b_n \cdot \sin\frac{n\cdot\pi\cdot t}{L}\right)$$

2. Antag, at differentialligningen har løsningen $x(t)$ med Fourierrækken:
   $$x(t) \cong FS\ x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cdot \cos\frac{n\cdot\pi\cdot t}{L} + b_n \cdot \sin\frac{n\cdot\pi\cdot t}{L}\right)$$
   NB Husk at $a_n$ og $b_n$ ikke er de samme som i 1.

3. Substituer *FS* $f(t)$ og *FS* $x(t)$ ind i differentialligningen og bestem koefficienterne $a$, $b$ og $c$.

4. Undersøg om endebetingelserne stemmer.

Såfremt endebetingelserne stemmer haves en formel Fourierrækkeløsning.

**Varmeledningsligningen**

Varmeledningsligningen gælder for temperaturen $u(x,t)$ i en lang tynd stang, som funktion af tiden $t$ og stedet $x$.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

1. Betragt begyndelsesbetingelserne, dvs. hvor $t = 0$. Herved fås $u(x,0) = f(x)$
2. Betragt randbetingelserne, ved $x = 0$ og $x = L$. $L$ er længden på stangen. Herved ses hvilken af nedenstående tilfælde der er tale om.

- Givet grænseværdiproblemet, hvor de to ender er holdt ved en konstant temperatur (her 0):
  $u(x,0) = f(x)$
  $u(0,t) = u(L,t) = 0$

Løsningen til differentialligningen er:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot e^{-\frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot k \cdot t}{L^2}} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}$$

hvor $b_n$ er givet ved:

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{L} dx \quad , n = 1, 2, 3...$$

- Givet grænseværdiproblemet, hvor de to ender er isolerede (intet varmeflow igennem enderne):

  $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$

  $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$

  Løsningen til problemet er:

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot e^{-\frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot k \cdot t}{L^2}} \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}$$

  hvor $a_n$ er givet ved:

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot x}{L} dx \quad , n = 0, 1, 2, 3...$$

# TRIGONOMETRISKE FUNKTIONER

**Sinus og cosinus**

$$\cos kt = \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2}$$

$$\sin kt = \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i}$$

hvor $k$ er en konstant $\in R$ og $i = \sqrt{-1}$

**Hyperbolsk sinus og cosinus**

$$\cosh kt = \frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2}$$

$$\sinh kt = \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}$$

hvor $k$ er en konstant $\in R$

**Additionsformlerne**

$$\cos(s-t) = \cos(s)\cos(t) + \sin(s)\sin(t)$$

$$\cos(s+t) = \cos(s)\cos(t) - \sin(s)\sin(t)$$

$$\sin(s+t) = \sin(s)\cos(t) + \cos(s)\sin(t)$$

$$\sin(s-t) = \sin(s)\cos(t) - \cos(s)\sin(t)$$

**Trigonometriske funktioner**

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

**Specielle funktionsværdier**

| Grader | 0º | 30º | 45º | 60º | 90º |
|---|---|---|---|---|---|
| Radiantal | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| Sin | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| Cos | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| Tan | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | - |