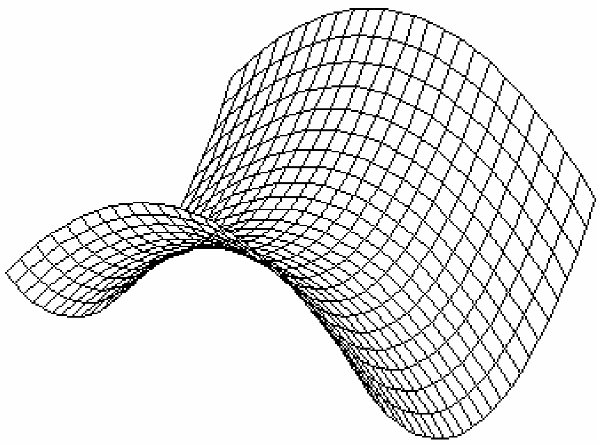
Matematisk Formelsamling

$$\iiint_V x^2 + \sqrt{x} \cdot \sin(x)\, dV$$



$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ T(\vec{e}_1) & T(\vec{e}_2) & \cdots & T(\vec{e}_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 = 0$$

for den

Teknisk- Naturvidenskabelige Basisuddannelse

FORORD

Denne matematiske formelsamling er udarbejdet til 1. års ingeniørstuderende på industri-ingeniørlinien på Aalborg Universitet, og den dækker områderne:

- Differentialregning
- Integralregning
- Lineær algebra
- Komplekse tal
- Differentialligninger
- Samt de vigtigste og mest brugte diverse formler fra gymnasiet og htx

Formelsamlingen er udarbejdet i 1997-98 af studerende i frustration over, at der ikke fandtes nogen brugbar formelsamling til matematikundervisningen på Aalborg Universitet. Siden er formelsamlingen løbende med hjælp fra studerende og undervisere tilpasset og forbedret. Formelsamlingen indeholder på en overskuelig og letforståelig måde alt, hvad man behøver til opgaveregning og eksamen.

Jannick Schmidt
Institut for Samfundsudvikling og Planlægning
Aalborg Universitet
2001

Formelsamling til matematik på Basisuddannelsen

Potens- og eksponentialregning

Potensregler

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$\left(a^r\right)^s = a^{r \cdot s}$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

$$\sqrt[r]{a} = a^{\frac{1}{r}}$$

$$\sqrt[s]{a^r} = a^{\frac{r}{s}}$$

Eksponential- og logaritmefunktioner

Skrivemåde

Eksponentielt voksende eller aftagende funktioner *f* med fremskrivningsfaktor *a* eller vækstrate *r*, skrives på formen:

$$f(x) = b \cdot a^x$$

$$f(x) = b \cdot (1+r)^x$$

Fremskrivningsfaktor *a*

Haves der to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) på en ret linie i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem, så er funktionen eksponentiel, og fremskrivningsfaktoren er:

$$a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}$$

Naturlig logaritmefunktion *ln*

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln\left(a^r\right) = r \cdot \ln a$$

Titalslogaritmefunktion *log*

$$y = 10^x \Leftrightarrow x = \log y$$

$$\log 10 = 1$$

$$\log(a \cdot b) = \log a + \log b$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$
$$\log\left(a^r\right) = r \cdot \log a$$

Potensfunktioner

Skrivemåde

Potensfunktioner med eksponent *a* skrives på formen:
$$f(x) = b \cdot x^a$$

Der gælder at:
$$y = x^a \Leftrightarrow x = \sqrt[a]{y}$$

Eksponenten a

Haves der to punkter (x_1, y_1) og (x_2, y_2) på en en ret linie i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem, så er funktionen en potensfunktion, og eksponenten er:
$$a = \frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1}$$

Koordinatsystemer

Polærkoordinater

Polær koordinater skrives på formen (r, θ), hvor r er modulus og θ er argumentet.

Omregning fra polære til rektangulære koordinater

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

Omregning fra rektangulære til polære koordinater

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Areal af kurveafgrænset område i polær koordinater

$$r = f(\theta)$$

Arealet fra $\theta = \alpha$ til $\theta = \beta$ er:

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \tfrac{1}{2}\left(f(\theta)\right)^2 d\theta$$

Rumfang af kurveafgrænset område i polær koordinater

$\alpha \le \theta \le \beta$ og $r_{indre}(\theta) \le r \le r_{ydre}(\theta)$

$$z = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$V = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_{indre}(\theta)}^{r_{ydre}(\theta)} (z \cdot r) dr d\theta = \iint_R f(x, y) dA$$

Hvis $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 1$ så giver dobbeltintegralet arealet af R:

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{r_{indre}(\theta)}^{r_{ydre}(\theta)} (r) dr d\theta = \iint_R 1 dA$$

Cylinderkoordinater

Cylinderkoordinater skrives på formen (r, θ, z)

Omregning fra cylindriske til rektangulære koordinater

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$
$$z = z$$

Omregning fra rektangulære til cylindriske koordinater

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

Rumintegrale af et område *T* i cylindriske koordinater

Hvis T kan skrives i cylinderkoordinater som:

$$T = \{(r,\theta,z) | \alpha \le \theta \le \beta\,,\, r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)\,,\, z_1(r,\theta) \le z \le z_2(r,\theta)\}$$

så er:

$$\iiint_T f(x,y,z) = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}\int_{z_1(r,\theta)}^{z_2(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\cdot r\, dz\, dr\, d\theta$$

Sfæriske koordinater

Sfæriske koordinater skrives på formen (ρ, ϕ, θ)

Sammenhæng mellem rektangulære- og sfæriske koordinater

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$x = \rho\sin\phi\cos\theta$$
$$y = \rho\sin\phi\sin\theta$$
$$z = \rho\cos\phi$$

Integration i sfæriske koordinater

$$\iiint_T f(x,y,z) = \iiint_U f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\cdot\rho^2\cdot\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\phi_1}^{\phi_2}\int_{\rho_1(\phi,\theta)}^{\rho_2(\phi,\theta)} f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\cdot\rho^2\cdot sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

Trigonometri

Vilkårlig trekant

Cosinusrelation

Gælder for vilkårlig trekant med siderne a, b og c og tilhørende vinkler A, B og C.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Sinusrelation

Gælder for vilkårlig trekant med siderne a, b og c og tilhørende vinkler A, B og C.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Trigonometriske sammenhænge

Additionsformlerne

$$\cos(s-t) = \cos(s)\cos(t) + \sin(s)\sin(t)$$
$$\cos(s+t) = \cos(s)\cos(t) - \sin(s)\sin(t)$$
$$\sin(s+t) = \sin(s)\cos(t) + \cos(s)\sin(t)$$
$$\sin(s-t) = \sin(s)\cos(t) - \cos(s)\sin(t)$$

Trigonometriske funktioner

$$\cos(x+2\pi) = \cos x$$
$$\sin(x+2\pi) = \sin x$$
$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\sin(-x) = -\sin x$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$
$$\sin(\pi - x) = \sin x$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\sin^2 x = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$
$$\cos^2 x = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$
$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$
$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$
$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$$

Specielle funktionsværdier

grader	0°	30°	45°	60°	90°
radiantal	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

$$\text{radiantal} = \frac{\pi}{180} \cdot \text{gradtal}$$

$$\text{gradtal} = \frac{180}{\pi} \cdot \text{radiantal}$$

Differentialregning

Regneregler

Differentiering af funktioner med en variabel

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$
$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$
$$(k \cdot f)'(x) = k \cdot f'(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2}$$
$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Differentiering af sammensatte funktioner med flere variable *(Kædereglen)*

$f(x_1, x_2, ..., x_n)$ er en funktion af n variable.

$g_1(t), g_2(t), ..., g_n(t)$ er n funktioner af 1 variabel.

$f(g_1(t), g_2(t), ..., g_n(t))$ differentieres på følgende måde:

$$\frac{df}{dt} = f_{x1}(g_1(t), g_2(t), ..., g_n(t)) \cdot g_1'(t) + ... + f_{xn}(g_1(t), g_2(t), ..., g_n(t)) \cdot g_n'(t)$$

Afledte funktioner

Funktion $f(x)$	Afledt funktion $\frac{d}{dx} f(x)$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
e^{kx}	ke^{kx}
a^x	$a^x \cdot \ln a$
x^a	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Funktion $f(x)$	Afledt funktion $\frac{d}{dx} f(x)$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos^{-1} x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Kritiske punkter og saddelpunkt

Der er kritisk punkt i (x, y) når enten $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ eller når ikke begge $\frac{\partial f}{\partial x}$ og $\frac{\partial f}{\partial y}$ eksisterer.

$A = f_{xx}(a, b)$

$B = f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b)$

$C = f_{yy}(a,b)$

$\Delta = AC - B^2$

Hvis $\Delta > 0$ og $A > 0$ så har *f* lokalt min i (a,b)
Hvis $\Delta > 0$ og $A < 0$ så har *f* lokalt max i (a,b)
Hvis $\Delta < 0$ så har *f* saddelpunkt i (a,b)

Gradient

Gradient $\nabla f(a,b,c)$ af $f(x,y,z)$ i $P(a,b,c)$:
Gradienten peger i den retning, hvor funktionen vokser hurtigst.

$\nabla f(a,b,c) = \left(f_x(a,b,c), f_y(a,b,c), f_z(a,b,c)\right)$

Anvendelse af gradient

Lineær approksimation
Retningsafledede
Tangentplan til flade, og tangent til kurve

Den retningsafledede

Den retningsafledede $D_{\vec{u}} f(P)$ af *f* i *P* angiver med hvilken rate *f* ændres i retningen $\vec{u}$, hvor vektoren $\vec{u}$ har længden 1.

$D_{\vec{u}} f(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$

Lineær approksimation

Approksimation for tilvækst af funktion *f* med en variabel *x*

Tilvækst i f kaldes $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$

$f(x+\Delta x) - f(x) \approx df = f_x(x)\Delta x$

Approksimation for tilvækst af funktion *f* med to variable *x* og *y*

Tilvækst i f kaldes $\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$

$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \approx df = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$

eller

$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \approx df = \nabla f(x,y) \cdot (\Delta x, \Delta y)$

Tangentplan

Tangentplan ved brug af kædereglen

En flade i rummet er givet ved $f(x,y) = z$

Tangentplanen α til fladen i punktet $(a,b, f(a,b))$ er givet ved:

$\alpha: \; f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) - (z - f(a,b)) = 0$

Normalvektoren $\vec{n}$ til fladen i punktet $(a,b, f(a,b))$ er givet ved:

$$\vec{n} = \left(f_x(a,b), f_y(a,b), -1 \right)$$

Tangentplan ved brug af gradient

En flade i rummet er givet ved $f(x, y, z) = 0$

Tangentplanen α til fladen i punktet (a, b, c) er givet ved:

$\alpha : \nabla f(a, b, c) \cdot ((x-a), (y-b), (z-c)) = 0$

Integralregning

Regneregler

Integreringsformler

$$\int f(x)dx = F(x) + k$$

$$\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx$$

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(t)dt \text{, hvor } t = g(x)$$

Trigonometrisk integration

u er en variabel og a er en konstant.

Hvis integralet indeholder	Så substituer med	Og brug at
$a^2 - u^2$	$u = a\sin\theta$	$1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$
$a^2 + u^2$	$u = a\tan\theta$	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
$u^2 - a^2$	$u = a\sec\theta$	$\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

Stamfunktioner

Funktion $f(x)$	Stamfunktion $\int f(x)dx$
$\ln x$	$x\ln x - x$
e^x	e^x
e^{kx}	$\frac{1}{k}e^{kx}$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
x^a	$\frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

Funktion $f(x)$	Stamfunktion $\int f(x)dx$
$\cos x$	$\sin x$
$\sin x$	$-\cos x$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$
$\cos^2 x$	$\frac{1}{2}(x + \sin x \cdot \cos x)$ $= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$
$\sin^2 x$	$\frac{1}{2}(x - \sin x \cdot \cos x)$ $= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$

Massemidtpunkt

Masse af plade *R* og legeme *T*

Massen af et planområde R med tykkelse 1 og densitet $\rho(x, y)$ i et givet punkt (x, y) er:

$$m = \iint_R \rho(x, y)dA$$

Massen af et legeme T med densitet $\rho(x, y, z)$ i et givet punkt (x, y, z) er:

$$m = \iiint_T \rho(x, y, z)dV$$

Massemidtpunkt

Massemidtpunktet i et planområde R med massen m og densitet $\rho(x, y)$ i et givet punkt (x, y) er:

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iint_R x \cdot \rho(x, y)dA$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\iint_R y \cdot \rho(x, y)dA$$

Massemidtpunktet i et legeme T med massen m og densitet $\rho(x, y, z)$ i et givet punkt (x, y, z) er:

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iiint_T x \cdot \rho(x, y, z)dV$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m}\iiint_T y \cdot \rho(x, y, z)dV$$

$$\bar{z} = \frac{1}{m}\iiint_T z \cdot \rho(x, y, z)dV$$

Lineær algebra

Vektorer

Vektorprodukt

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ og $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$(k\vec{a}) \times \vec{b} = k(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (k\vec{b})$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin v$$

Matricer

En matrix skrives på formen $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

Den transponerede matrix

A^T er den transponerede matrix af A.

A^T fremkommer ved at spejle matricen A i diagonalen mellem a_{11} og a_{mn}

Identitetsmatricen

Identitetsmatricen I er matricen med 1-taller på alle a_{ii} og nuller på resten af a_{ij}

3×3 identitetsmatrix $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Identitetsmatricen er altid en $n \times n$ matrix.

Matrixaddition

A og B er $m \times n$ matricer

$$A + B = \lfloor a_{ij} + b_{ij} \rfloor$$

Matrix scalar multiplikation

$$r \cdot A = \lfloor r \cdot a_{ij} \rfloor$$

Matrixprodukt

A er en $m \times n$ matrix

B er en $n \times s$ matrix
AB er en $m \times s$ matrix
Matrixproduktet fås ved at tage skalarproduktet af række *i* i *A* og søjle *j* i *B*, og placere dette på plads *ij* i *AB*.

Regneregler for matrixprodukt
$AB \neq BA$ (Dette gælder generelt, men ikke i alle tilfælde)
$(AB)C = A(BC)$
$(rA)B = A(rB) = r(AB)$
$IA = A$
$A(B+C) = AB + AC$
$(A+B)C = AC + BC$
$\left(A^T\right)^T = A$
$(A+B)^T = A^T + B^T$
$(AB)^T = B^T A^T$

Inversmatrix

A er en $n \times n$ matrix
Hvis følgende udtryk er gældende så er *A* invertibel:
$AC = CA = I$ $\quad$ C er A's inverse A^{-1}
$\det(A) \neq 0$
$\text{rang}(A) = n$

A^{-1} findes ved elementære rækkeoperationer så $[A|I] \sim [I|A^{-1}]$
$AA^{-1} = A^{-1}A = I$
$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Determinant

Determinanter skrives på formen $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

A er en $n \times n$ matrix
Hvis $\det(A) \neq 0$ så er A invertibel
Hvis to rækker i en matrix *A* er ens, så er det(*A*)=0

Udregning af determinanter

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$\det(A) = a_{r1}a'_{r1} + a_{r2}a'_{r2} + \ldots + a_{rn}a'_{rn}$ $\quad$ $r \in \{1,2,\ldots,n\}$ udvikling efter række *r*
$\det(A) = a_{1s}a'_{1s} + a_{2s}a'_{2s} + \ldots + a_{ns}a'_{ns}$ $\quad$ $s \in \{1,2,\ldots,n\}$ udvikling efter søjle *s*
hvor cofaktoren $a'_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$

A_{ij} er matricen, der er fremkommet ved at fjerne række *i* og søjle *j* i *A*.

Hvis der over eller under diagonalen mellem a_{11} og a_{nn} kun står nuller er:
$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn}$

Regneregler for determinanter

$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$
$\det(A^T) = \det(A)$
$c \cdot \det(A)$ svarer til at gange alle led i én række eller søjle med *c*

Række- og søjleoperationer på determinanter

Rækkeoperationer *R* på række *i* og *j* har følgende konsekvenser:

Rækkeoperation	Konsekvens
$R_i \leftrightarrow R_j$	$-\det(A)$
$R_i \to c \cdot R_i$	$c \cdot \det(A)$
$R_i \to R_i + c \cdot R_j$	$\det(A)$

Tilsvarende gælder det samme for søjleoperationer *S* på søjle *i* og *j*.

Ligningssystemer

$A\vec{x} = \vec{b}$ er et inhomogent ligningssystem
$A\vec{x} = 0$ er et homogent ligningssystem
Et ligningssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ er:
- Konsistent, hvis det har en eller flere løsninger.
- Inkonsistent, hvis det ingen løsninger har, dvs. det indeholder en række som nedenfor:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & c \neq 0 \end{array}\right]$$

Et ligningssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ skrives på formen:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & \vec{b} \end{array}\right]$$

Fuldstændig løsning til et inhomogent ligningssystem

Alle løsninger til $A\vec{x} = \vec{b}$ er givet ved $\vec{x} = \vec{p} + \vec{h}$, hvor $\vec{p}$ er en partikulær løsning og $\vec{h}$ er en løsning til det homogene ligningssystem $A\vec{x} = 0$

Løsning af ligningssystemer med Gauss-Jordan metoden

$A\vec{x} = \vec{b}$

Ligningssystemet reduceres med rækkeoperationer, indtil der er pivot eller nul-række i alle matricens rækker. Hernæst findes x_i med baglæns substitution.

Rækkeoperationer:

$R_i \leftrightarrow R_j$

$R_i \rightarrow c \cdot R_i$

$R_i \rightarrow R_i + c \cdot R_j$

Løsning af ligningssystemer med determinantmetoden

$A\vec{x} = \vec{b}$

A er en $n \times n$ matrix og $\vec{x} = [x_1, x_2, ..., x_n]$

$$x_i = \frac{\det(B_i)}{\det(A)}$$

hvor B_i er den matrix der fås ved at erstatte søjle *i* i *A* med $\vec{b}$

Matrixligning

Matrixligningen $AX = B$, hvor *X* er den ukendte matrix, løses ved:

$X = A^{-1}B$

Matrixligningen $XA = B$, hvor *X* er den ukendte matrix, løses ved:

$X = BA^{-1}$

Rum

Søjlerum

Søjlerummet til en $m \times n$ matrix *A* er:

$sp(s_1, s_2, ..., s_n)$ hvor $s_1, s_2, ..., s_n$ er søjlerne i *A*

Rækkerum

Rækkerummet til en $m \times n$ matrix *A* er:

$sp(r_1, r_2, ..., r_m)$ hvor $r_1, r_2, ..., r_m$ er rækkerne i *A*

Nulrummet

Nulrummet *N* af en matrix er defineret ved:

$N = \{\vec{x} | A\vec{x} = 0\}$

Underrum

Hvis en delmængde W af R^n er lukket under både addition og multiplikation, så er W et underrum af R^n

W lukket under addition $\vec{u}, \vec{v} \in W \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in W$

W lukket under skalarmultiplikation $\vec{v} \in W, r \in R \Rightarrow r\vec{v} \in W$

Hvis $\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_k \in R^n$ så er $W = sp(\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_k)$ et underrum af R^n

Dimension af et underrum

$\dim(W) = \text{antal uafhængige vektorer i } W$

Rang

Rækkerang = Dimensionen af rækkerummet

Søjlerang = Dimensionen af søjlerummet

Der gælder at Rang = Søjlerang = Rækkerang

Rang = Antal pivot'er i den reducerede matrix

Rangligningen:

$\text{rang}(A) + \text{nullity}(A) = n$

hvor A er en $m \times n$ matrix og $\text{nullity}(A)$ er antallet af frie variable i løsningen til $A\vec{x} = \vec{0}$

Basis for et rum

$\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_k \in R^n$ og *W* er et underrum af R^n. Der gælder så at $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_k\}$ er en basis for *W*, hvis enhver vektor i *W* entydigt kan skrives:
$sp(\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_k)$ dvs. $r_1\vec{w}_1, r_2\vec{w}_2, ..., r_k\vec{w}_k$, hvilket betyder at $\vec{w}_1, \vec{w}_2, ..., \vec{w}_k$ er lineært uafhængige.

En basis for et underrum *W* findes ved:

1. Opstil en matrix *A* af søjlevektorerne $\vec{w}_j$
2. *A* reduceres til reduceret rækkeform *H*
3. Alle $\vec{w}_j$, svarende til hvor der er pivot i søjle *j* i *H*, udgør en basis for *W*

Husk det er <u>ikke</u> søjlevektorerne fra *H* men fra *A*

Baser for rum tilknyttet en matrix

A er en matrix med reduceret rækkeform *H*

Basis for rækkerummet udgøres af de rækker $\neq 0$ i *H*

Basis for søjlerummet udgøres af de søjler fra *A*, hvor der tilsvarende er pivot i *H*

Basis for nulrummet udgøres af vektorerne fremkommet ved løsning af $A\vec{x} = \vec{0}$

Udvidelse af en basis for et rum

Et rum har basisvektorerne $\vec{b}_1, \vec{b}_2, .., \vec{b}_m$ og skal udvides til R^n. Der opstilles matricen:

$$\begin{bmatrix} | & | & & | & | & | & & | \\ \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_m & \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \\ | & | & & | & | & | & & | \end{bmatrix}$$, hvor $\vec{e}_1, \vec{e}_2, .., \vec{e}_n$ er enhedsvektorerne i R^n

Matricen reduceres til reduceret rækkeform, og de tilsvarende søjler, hvori der er pivot, i den oprindelige matrix udgør en basis for R^n.

Lineær transformation

En funktion $T : R^n \to R^m$ er en lineær transformation hvis:

$T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$ Bevaring af addition

$T(r\vec{u}) = rT(\vec{u})$ Bevaring af skalarmultiplikation

for alle $\vec{u}$ og $\vec{v}$ i R^n og alle $r \in R$

Hvis en afbildning kan skrives på formen:
$T(\vec{x}) = A\vec{x}$ er den lukket under addition og skalarmultiplikation og er derfor en lineær transformation.

Standard matrix repræsentation for lineær transformation

$T : R^n \to R^m$ er en lineær transformation og A er en $m \times n$ matrix
$T(\vec{x}) = A\vec{x}$, hvor standard matrix repræsentationen A er:

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ T(\vec{e}_1) & T(\vec{e}_2) & \cdots & T(\vec{e}_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

Sammensat funktion

$T_1 : R^m \to R^n$ med standard matrix repræsentation A

$T_2 : R^n \to R^m$ med standard matrix repræsentation B

$(T_1 \circ T_2)(\vec{x}) = T_1(T_2(\vec{x})) = (AB)\vec{x}$

Invers funktion

T har en invers hvis og kun hvis A har en invers:
$T^{-1}(\vec{x}) = A^{-1}\vec{x}$

Standard matrix repræsentation ud fra kendte funktionsværdier af basisvektorer

$T : R^m \to R^n$ Følgende funktionsværdier er kendte:

$$T(\vec{b}_1) = \vec{v}_1$$
$$T(\vec{b}_2) = \vec{v}_2$$
$$\vdots$$
$$T(\vec{b}_k) = \vec{v}_k$$

hvor $\vec{b}_1, \vec{b}_2, .., \vec{b}_k$ er vektorer i R^n og $\vec{v}_1, \vec{v}_2, .., \vec{v}_k$ er vektorer i R^m

Enhedsvektorerne i R^n findes som linearkombination af $\vec{b}_1, \vec{b}_2, .., \vec{b}_k$ og der benyttes at lineære transformationer er lukkede under skalarmultiplikation og addition.

$$T(\vec{e}_1) = T(r_1\vec{b}_1 + r_2\vec{b}_2 + ... + r_k\vec{b}_k) = r_1T(\vec{b}_1) + r_2T(\vec{b}_2) + ... + r_kT(\vec{b}_k)$$
$$T(\vec{e}_2) = T(s_1\vec{b}_1 + s_2\vec{b}_2 + ... + s_k\vec{b}_k) = s_1T(\vec{b}_1) + s_2T(\vec{b}_2) + ... + s_kT(\vec{b}_k)$$
$$\vdots$$
$$T(\vec{e}_k) = T(t_1\vec{b}_1 + t_2\vec{b}_2 + ... + t_k\vec{b}_k) = t_1T(\vec{b}_1) + t_2T(\vec{b}_2) + ... + t_kT(\vec{b}_k)$$

Skalarerne $r, s, ..., t$ findes ved:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} | & | & & | & \\ \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_k & I \\ | & | & & | & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|cccc} & r_1 & s_1 & & t_1 \\ I & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ & r_k & s_k & & t_k \end{array}\right]$$

Vektorrum

Definition

Et vektorrum er en mængde *V* med:

Addition: For $\vec{u}, \vec{v} \in V$ findes $\vec{u} + \vec{v} \in V$

Skalarmultiplikation: For $r \in R$ og $\vec{v} \in V$ findes $r\vec{v} \in V$

som opfylder:

A1 $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

A2 $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

A3 Der findes en vektor $\vec{0} \in V$ som opfylder $\vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$

A4 For hver $\vec{v} \in V$ findes $-\vec{v} \in V$ som opfylder $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$

S1 $r(\vec{v} + \vec{w}) = r\vec{v} + r\vec{w}$

S2 $(r + s)\vec{v} = r\vec{v} + s\vec{w}$

S3 $r(s\vec{v}) = (rs)\vec{v}$

S4 $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$

For alle $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ og $r, s \in R$

Desuden skal der gælde:

$0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$

$r \cdot \vec{0} = \vec{0}$

$(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$

Lineær uafhængighed

X er en mængde af vektorer i *V*.

X er lineært uafhængig hvis

$r_1\vec{x}_1 + r_2\vec{x}_2, ..., r_n\vec{x}_n = \vec{0} \Rightarrow r_1 = r_2 = ... = r_n = 0$

for $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n \in X$ og $r_1, r_2, ..., r_n \in R$

Span

X er en mængde af vektorer i *V*

$sp(X)$ = mængden af vektorer i *V* der kan skrives som $r_1\vec{x}_1 + r_2\vec{x}_2, ..., r_n\vec{x}_n$, hvor $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_n\}$ er en endelig delmængde af *X* og $r_1, r_2, ..., r_n \in R$

Hvis *X* er endelig: $X = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ..., \vec{x}_m\}$ så er:

$sp(x) = \{r_1\vec{x}_1 + r_2\vec{x}_2, ..., r_m\vec{x}_m | r_1, ..., r_m \in R\}$

sp(*X*) er et underrum af *V*, der kaldes underrummet udspændt af *X*.

Underrum

Et underrum W af V er en delmængde $W \leq V$ der opfylder:

$W \neq \emptyset$

$\vec{v}, \vec{w} \in W \Rightarrow \vec{v} + \vec{w} \in W$ lukket under addition

$\vec{v} \in W \Rightarrow r\vec{v} \in W$ for $r \in R$ lukket under skalarmultiplikation

Et underrum af et vektorrum er selv et vektorrum.

Basis for et vektorrum

En mængde B kaldes basis for V hvis

$sp(B) = V$ og B er lineært uafhængig

Antal vektorer er det samme for alle baser for V, og dette antal kaldes dimensionen.
Hvis $V = \{\vec{0}\}$ er den tomme mængde basis for V og V har dimension 0.

Ordnet basis

En ordnet basis $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n)$ for et vektorrum V består af *dim*(V) uafhængige vektorer i en bestemt rækkefølge.

Matricen $M_B = \begin{bmatrix} | & & | \\ \vec{b}_1 & \cdots & \vec{b}_n \\ | & & | \end{bmatrix}$ kaldes basismatricen.

Koordinatvektor

Til enhver vektor $\vec{v}$ i vektorrummet V med basismatrix M_B er der knyttet en entydig koordinatvektor $\vec{v}_B = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$ således at

$\vec{v} = M_B \vec{v}_B = r_1\vec{b}_1 + r_2\vec{b}_2 + ... + r_n\vec{b}_n$

Koordinatvektoren $\vec{v}_B$ til en vektor $\vec{v}$ i vektorrummet V med ordnet basis B findes ved:
$[M_B | \vec{v}] \sim [I | \vec{v}_B]$, hvor I er identitetsmatricen.

Basisskift

Der haves et vektorrum med to ordnede baser B og B' og tilhørende basismatricer M_B og $M_{B'}$.
Hvis $\vec{v}_B$ er koordinatvektoren til en vektor $\vec{v}$ mht. M_B findes koordinatvektoren $\vec{v}_{B'}$ for $\vec{v}$ mht. $M_{B'}$ ved

$\vec{v}_{B'} = C_{B,B'}\vec{v}_B$ hvor $C_{B,B'}$ kaldes koordinatskiftematricen fra B til B'.

$C_{B,B'}$ findes ved:

$C_{B,B'} = M_{B'}^{-1} M_B$ eller

$[M_{B'} | M_B] \sim [I | C_{B,B'}]$

Lineære transformationer

V og W er vektorrum.

En funktion $T: V \to W$ kaldes en lineær transformation hvis:

$T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$

$T(r\vec{u}) = rT(\vec{u})$

For alle $\vec{u}, \vec{v} \in V$ og $r \in R$

Alle lineære transformationer kan skrives på formen $T(\vec{x}) = A\vec{x}$

Billedmængden/Billedrummet (range) af T er:

$T(V) = \{T(\vec{v}) | \vec{v} \in V\}$ som er et underrum af W.

$T(V) = \{T(\vec{v}) | \vec{v} \in V\}$ = Søjlerummet af A

Kernen af T er:

$\ker(T) = T^{-1}[\vec{0}] = \{\vec{v} \in V | T(\vec{v}) = \vec{0}\}$ som er et underrum af V.

$\ker(T) = T^{-1}[\vec{0}] = \{\vec{v} \in V | T(\vec{v}) = \vec{0}\}$ = Nulrummet af A

ker(T) er løsningsmængden til den homogene lineære ligning $T(\vec{x}) = \vec{0}$

Hvis den inhomogene ligning $T(\vec{x}) = \vec{b}$ har en partikulær løsning $\vec{p}$, så er den fuldstændige løsning

$\ker(T) + \vec{p}$

Komplekse tal

Mængden af komplekse tal skrives C

$a+bi \in C$ hvor $a,b \in R$ og $i^2 = -1$

Elementære regneregler

Skrivemåde

a er et komplekst tal $a \in C$ og skrives:

$a = (\alpha + \beta i)$

$i^2 = -1$

α er realdelen af a $\mathrm{Re}(a) = \alpha$

β er imaginærdelen af a $\mathrm{Im}(a) = \beta$

a kan skrives på polær form:

$a = r_\theta$

r: Numerisk værdi eller Modulus

θ: Argument/hovedargument

Sammenhæng mellem polær og rektangulær form er:

$r = |a| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

$\tan\theta = \dfrac{\beta}{\alpha}$

$\alpha = r\cos\theta$

$\beta = r\sin\theta$

Regneregler

$a,b,c \in C$

$a+b = b+a$

$a + (b+c) = (a+b) + c$

$a \cdot (b+c) = a\cdot b + a \cdot c$

$a+b = c \Leftrightarrow b = c-a$

$a \cdot b = c \Leftrightarrow b = \dfrac{c}{a}$ for $a \neq 0$

$|ab| = |a| \cdot |b|$

$\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

Addition og subtraktion

$a = \alpha_a + \beta_a i$ og $b = \alpha_b + \beta_b i$

$a+b = (\alpha_a + \alpha_b) + (\beta_a + \beta_b)i$

$a-b = (\alpha_a - \alpha_b) + (\beta_a - \beta_b)i$

Multiplikation og division

$$a \cdot b = (\alpha_a \alpha_b - \beta_a \beta_b) + (\alpha_a \beta_b + \beta_b \alpha_a) i$$

$$r_\theta \cdot s_\phi = rs_{\theta+\phi}$$

$$\frac{r_\theta}{s_\phi} = \left(\frac{r}{s}\right)_{\theta-\phi}$$

Konjugering

$a = \alpha + i\beta$ er et kompleks tal

$\overline{a} = a_1 - ia_2$ er det konjugerede komplekse tal

$$|a|^2 = a\overline{a}$$

$$\overline{ab} = \overline{a}\overline{b}$$

$$\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$$

Polynomier

Andengradsligninger

Løsningerne til $z^2 = a$ er givet ved:

$$z = \pm\left(\sqrt{\frac{r+\alpha}{2}} + i \cdot sign(\beta)\sqrt{\frac{r-\alpha}{2}}\right)$$

hvor $sign(\beta) = \begin{cases} 1 \text{ hvis } \beta \geq 0 \\ -1 \text{ hvis } \beta < 0 \end{cases}$

Tilsvarende er løsningen på polær form, hvor $z^2 = a = r_\theta$

$z = \sqrt{r}_{\frac{\theta}{2}}$, $z = \sqrt{r}_{\frac{\theta+2\pi}{2}}$

Løsningerne til $az^2 + bz + c = 0$ er givet ved:

$$z = \frac{-b \pm w}{2a}$$

hvor $w^2 = D = b^2 - 4ac$

Binome ligninger

Binome ligninger er ligninger på formen $z^n = a = r_\theta$

$$z = \left[\sqrt[n]{r}\right]_{\frac{\theta}{n} + p \cdot \frac{2\pi}{n}}$$

$$z = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + p \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\theta}{n} + p \cdot \frac{2\pi}{n}\right)\right]$$

hvor $p = 0,1,2,\ldots,n-1$

Polynomier af højere grad

$a_i \in C$ og $n, r_i \in R$

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

$P(z) = a_n(z - r_1)(z - r_2) \cdot \ldots \cdot (z - r_n)$ hvor $\{r_1, r_2, ..., r_n\}$ er rødder.
Hvis z er rod i polynomiet, så er $\bar{z}$ også rod

Eksponentialfunktioner

$x, y \in R$ og $z, w \in C$

$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$

$e^{z+w} = e^z e^w$

Differentialligninger

Typer af differentialligninger

Homogene differentialligninger

Differentialligninger siges at være homogene, når funktionen af x og dens afledede $L(x)$ er 0, dvs. $L(x)=0$

Inhomogene differentialligninger

Differentialligninger siges at være inhomogene, når funktionen af x og dens afledede $L(x)$ er en funktion $q(t)$, dvs.

$L(x)=q(t)$

Lineære differentialligninger

$L\colon V \to W$ betegner afbildningen $L(f)=\dfrac{d^n x}{dt^n}+a_{n-1}\dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\dfrac{dx}{dt}+a_0 x$

En afbildning siges så at være lineær hvis

$L(c_1x_1+c_2x_2)=c_1L(x_1)+c_2L(x_2)$

for alle $x_1 \in V$, $x_2 \in V$ og alle konstanter

Lineære differentialligninger af *n*'te orden med konstante koefficienter

En differentiallignings orden n er afgjort af højest afledede af x. At koefficienterne er konstante betyder at $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_0$ er konstanter.

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{dx}{dt}+a_0 x=q(t)$$

Løsninger til differentialligninger generelt

Eksistens og entydighed

For ethvert talsæt $(t_0, x_0, v_1, v_2, \ldots, v_{n-1})$ findes der netop een løsning $x=\varphi(t)$ til differentialligningen $\dfrac{d^n x}{dt^n}+a_{n-1}\dfrac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\ldots+a_1\dfrac{dx}{dt}+a_0 x=q(t)$ for hvilken

$\varphi(t_0)=x_0$ og $\varphi^{(k)}(t_0)=v_k$ hvor $k=1,2,\ldots,n-1$

Fuldstændig løsning til en differentialligning

For enhver lineær differentialligning $L(x)=q$ gælder, at hvis

$x_1, x_2, \ldots, x_k$ er løsninger til den homogene ligning, så er

$x=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_kx_k$ også løsning til $L(x)=0$

Fuldstændig løsning til en inhomogen differentialligning

Samtlige løsninger til den inhomogene ligning $L(x) = q$ fås ved at addere samtlige løsninger til den homogene ligning med en partikulær løsning til den inhomogene ligning.

Superpositionsprincippet

Hvis $x = x_i$ er løsninger til $L(x) = q_i$ for $i = 1,...,k$, da er $x = r_1x_1 + r_2x_2 + ... + r_kx_k$ løsning til ligningen:

$L(x) = r_1q_1 + r_2q_2 + ... + r_kq_k$

hvor r_i er en konstant.

Retningslinier til gæt af partikulær løsning til en inhomogen ligning

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + ... + a_1\frac{dx}{dt} + a_0x = q(t)$$

- Hvis $q(t) = ae^{bt}$ så gæt på den partikulære løsning
  $x(t) = Ae^{bt}$, hvor A er en ukendt konstant som findes ved indsættelse i differentialligningen.

- Hvis $q(t) = a\cos(bt)$ eller $q(t) = a\sin(bt)$ så gæt på den partikulære løsning
  $x(t) = A\cos(bt) + B\sin(bt)$, hvor A og B er ukendte konstanter som findes ved indsættelse i differentialligningen.

- Hvis $q(t) = ae^{ct}\cos(bt)$ eller $q(t) = ae^{ct}\sin(bt)$ så gæt på den partikulære løsning
  $x(t) = Ae^{ct}\cos(bt) + Be^{ct}\sin(bt)$, hvor A og B er ukendte konstanter som findes ved indsættelse i differentialligningen.

- Hvis $q(t) =$ *et polynomium af n'te grad* så gæt på den partikulære løsning
  $x(t) = a_nt^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_1t + a_0$, hvor $a_n, a_{n-1},..., a_1, a_0$ er ukendte konstanter som findes ved indsættelse i differentialligningen.

Løsninger til 1. ordens differentialligninger

Homogen 1. ordens differentialligning

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = 0$$

Den fuldstændige løsning er givet ved:

$$x(t) = ce^{-\int p(t)dt}$$

Inhomogen 1. ordens differentialligning

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = q(t)$$

Den fuldstændige løsning er givet ved:

$$x(t) = e^{-\int p(t)dt}\left(\int e^{\int p(t)dt}q(t)dt + c\right)$$

Løsninger til homogene 2. ordens differentialligninger

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$$

Dette omfatter løsning af homogene 2. ordens differentialligninger med konstante koefficienter.

Karakterligning

Karakterligningen til differentialligningen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$$

er givet ved:

$$R^2 + a_1 R + a_0 = 0$$

Løsning til ligning med 2 reelle rødder i karakterligningen

r_1 og r_2 er de reelle rødder til karakterligningen. Den fuldstændige løsning er så:

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

Løsning til ligning med 2 komplekse rødder i karakterligningen

$a = \alpha \pm \beta i$ er de reelle rødder til karakterligningen. Den fuldstændige løsning er så:

$$x(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t)$$

Løsning til ligning med reel dobbeltrod i karakterligningen

r er den reelle dobbeltrod til karakterligningen. Den fuldstændige løsning er så:

$$x(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}$$

Løsninger til homogene n'te ordens differentialligninger

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$$

Den fuldstændige løsning til en homogen differentialligning af n'te orden består af *n* funktioner, dvs.

$$x(t) = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_n f_n$$

Karakterligning

Karakterligningen til differentialligningen:

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$$

er givet ved:

$$R^n + a_{n-1}R^{n-1} + \ldots + a_1 R + a_0 = 0$$

Løsning til ligning hvis $r \in R$ er rod m gange i karakterligningen

Der fås m funktioner:

$c_1 e^{rt}, c_2 t e^{rt}, c_3 t^2 e^{rt} \ldots, c_m t^{m-1} e^{rt}$

Løsning til homogen ligning hvis $\alpha \pm \beta i \in C$ er rod m gange i karakterligningen

Der fås $2m$ funktioner:

$c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t),\ c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t),$

$c_3 t e^{\alpha t} \cos(\beta t),\ c_4 t e^{\alpha t} \cos(\beta t),$

$\vdots$

$c_{m-1} t^{m-1} e^{\alpha t} \cos(\beta t),\ c_m t^{m-1} e^{\alpha t} \sin(\beta t)$